

TESIS DE MAESTRÍA EN INGENIERÍA

MODELADO COMPUTACIONAL POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DE LA DINÁMICA DE SISTEMAS CON INTERACCIÓN ENTRE FLUIDOS Y ESTRUCTURAS ELÁSTICAS

Ing. Francisco Martín Alderete Tommasi
Maestrando

Dr. Claudio Padra
Director

Dr. Enzo Dari
Co-director

Miembros del Jurado

Dr. Federico Teruel (Instituto Balseiro - CNEA - CONICET)
Dr. Christian Marcel (Instituto Balseiro - CNEA - CONICET)
Dr. Isidoro Vaquila (INVAP)

Diciembre de 2018

Departamento de Mecánica Computacional
Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

Índice de contenidos

Bibliografía	i
Índice de contenidos	i
Índice de figuras	iv
Índice de tablas	vii
Resumen	viii
Abstract	ix
1. Introducción	1
1.1. Interacción Fluido Estructura	2
1.2. Generalidades sobre el método de los elementos finitos	3
1.3. Objetivo	4
1.4. Organización del Trabajo	4
2. Interacción Fluido - Sólido Elástico	6
2.1. Métodos Monolíticos y Métodos Particionados	6
2.2. Método ALE	7
2.2.1. Formulación Lagrangiana	7

2.2.2. Formulación Euleriana	8
2.2.3. Formulación ALE	8
2.3. Métodos de sólidos inmersos	9
2.4. Método ImmALE	10
2.5. Modelo matemático	11
2.5.1. Ecuaciones del fluido	15
2.5.2. Ecuaciones del Sólido	17
3. Código Computacional	21
3.1. Plataforma PARGPFEP	21
3.2. Código ImmALE	22
4. Validación	30
4.1. Estrategia de Validación	30
4.2. Deflexión de una Viga en Voladizo	31
4.2.1. Descripción del problema	31
4.2.2. Resultados	33
4.3. Flujo alrededor de un obstáculo prismático	34
4.3.1. Descripción del problema	34
4.3.2. Resultados	36
4.4. Flujo alrededor de un cilindro elástico	37
4.4.1. Descripción del problema	37
4.4.2. Resultados y discusión	46
5. Conclusiones	57

5.1. Conclusiones	57
5.2. Trabajo a futuro	58
 A. Modos de oscilación de una viga empotrada con un extremo libre	 60
 B. Estimación de la deflexión máxima en una viga empotrada cilíndrica sometida a un flujo transversal de corriente	 63
 Bibliografía	 65
 Agradecimientos	 67

Índice de figuras

1.1. Simulación de una válvula aórtica prostética. Imagen tomada del trabajo de Luraghi, G. et al. [1].	2
1.2. Discretización de un dominio bidimensional.	4
2.1. Diagrama de un esquema Monolítico (a) y un esquema Particionado (b) para problemas de FSI, donde S_f y S_s denotan las soluciones del fluido y del sólido, respectivamente. Imagen tomada del trabajo de Hou, G. H. et al. [2].	7
2.2. Explicación unidimensional de la formulación Lagrangiana, Euleriana y ALE de movimiento. Imagen adaptada del trabajo de Figueroa A. A. et al [3].	8
2.3. Esquema general de un problema de FSI. Imagen tomada del trabajo de Blanco P. J. et al. [4].	12
2.4. Esquema de las funciones φ_i empleadas para el caso de un dominio 2D.	18
3.1. Esquema del funcionamiento del código immALE.	23
4.1. Esquema del problema de una viga en voladizo con carga puntual en su extremo libre.	32
4.2. Esquema y orientación respecto al eje de coordenadas de la malla utilizada en el problema de la viga en voladizo.	33
4.3. Vista de la viga deformada (con un factor de amplificación 10) y el módulo del desplazamiento de la viga en voladizo estudiada, hallada mediante el código computacional.	34

4.4. Configuración utilizada para el problema de validación.	35
4.5. Configuración geométrica utilizada en la simulación del flujo alrededor de un obstáculo prismático.	35
4.6. Velocidad en la dirección \hat{x} del centro de masa del sólido en función del tiempo.	36
4.7. Presiones (a) y vista de la malla del fluido deformada para tiempo $t=0.99$ (factor de amplificación de las deformaciones de 1000) (b).	37
4.8. Configuración utilizada para el problema de validación.	38
4.9. Configuración geométrica utilizada para el problema de validación. . . .	39
4.10. Comportamiento del flujo en función del número de Reynolds. Imagen tomada del trabajo de White, F. M. [5].	40
4.11. Calle de vórtices de Von Kármán generada por el flujo alrededor de un obstáculo sólido. [Fotografía de Jürgen Wagner] (2014).	41
4.12. Resultados experimentales de medición del Número de Strouhal en función del número de Reynolds para cilindros esbeltos verticales inmersos en un flujo horizontal. Imagen adaptada del trabajo de Techen A. H. [6]	41
4.13. Vistas en corte de las mallas del fluido y sólido empleadas y ubicación del punto de referencia D en la malla del sólido.	44
4.14. Visualización de las características del flujo a través de las presiones en el plano $z = 7,5$ a tiempo $t = 450$	47
4.15. Visualización de las características del flujo a través del módulo de la velocidad en el plano $z = 7,5$ a tiempo $t = 450$	48
4.16. Desprendimiento de par de vórtices simétricos observado para tiempos inferiores a $t = 150$. Visualización de presiones y líneas de corriente. . .	49
4.17. Ubicación de los puntos A, B y C en el plano $z = 7,5$	49
4.18. Presiones en función del tiempo de los puntos A y B (Figura 4.17) para el caso 2.	50
4.19. Velocidad en y en función del tiempo en el punto C para el caso 2. . . .	51

4.20. Desplazamientos y velocidades en el punto D en función del tiempo para el caso 1.	51
4.21. Desplazamientos y velocidades en el punto D en función del tiempo para el caso 2.	52
4.22. Presiones en función del tiempo de los puntos A y B (Figura 4.17) para el caso 3.	53
4.23. Velocidad en y en función del tiempo en el punto C para los casos 2 y 3.	53
4.24. Desplazamientos y velocidades en el punto D en función del tiempo para el caso 3.	55
4.25. Visualización 3D a partir de las presiones de los vórtices de la calle vórtices de Von Kármán obtenida para el caso 2 mediante el código desarrollado.	56
A.1. Forma modal y coeficiente C_i de los tres primeros modos de vibración de una viga con un extremo empotrado y un extremo libre.	62
B.1. Coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds para un cilindro de longitud infinita.	64

Índice de tablas

4.1. Parámetros de la simulación considerados para la resolución del problema de una viga en voladizo.	34
4.2. Desplazamientos máximos calculados para la viga en voladizo estudiada.	34
4.3. Parámetros geométricos del canal y la obstrucción.	38
4.4. Parámetros fluidodinámicos de las simulaciones.	45
4.5. Parámetros elastodinámicos de las simulaciones.	45
4.6. Parámetros numéricos más relevantes de las simulaciones.	45

Resumen

Los problemas de interacción fluido-estructura (IFE) son problemas en los cuales hay un acoplamiento multifísico entre las ecuaciones que rigen la dinámica de estructuras con las ecuaciones de la fluidodinámica.

En el presente trabajo se busca desarrollar una herramienta computacional capaz de resolver problemas de interacción fluido-estructura en transitorios temporales. Se utiliza un enfoque immALE para resolver el problema de IFE. El mismo combina propiedades del método de sólidos inmersos con una formulación de Euler-Lagrange Arbitraria (ALE). La misma se desarrolla sobre la plataforma general de codificación de elementos finitos en arquitecturas distribuidas PARGPFEP, desarrollada en el departamento de Mecánica Computacional del Centro Atómico Bariloche.

Se realiza una descripción del código desarrollado y los fundamentos teóricos en que se basa el mismo. Luego se presenta una validación de éste utilizando casos sencillos con soluciones conocidas. En primera instancia se simula la deflexión de una viga en voladizo con una carga concentrada en su extremo libre. Se compara la solución numérica obtenida con la solución analítica a la cual se arriba aplicando la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. En segunda instancia se simula el flujo pistón en un canal bidimensional parcialmente obstruido por un obstáculo rectangular elástico. Se compara la solución obtenida con la solución analítica del problema. En tercera instancia se simula el flujo incompresible a través de un canal tridimensional obstruido por un cilindro sólido elástico. Para este último caso se evalúa la frecuencia de desprendimiento de vórtices de Von Kármán y se compara la misma con la obtenida mediante correlaciones empíricas. Finalmente se estudia la influencia de este fenómeno en la estructura elástica.

Palabras clave: INTERACCIÓN FLUIDO-ESTRUCTURA, MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS, ELASTODINÁMICA COMPUTACIONAL, FLUIDODINÁMICA COMPUTACIONAL, VÓRTICES DE VON KÁRMÁN.

Abstract

Fluid-Solid interaction (FSI) problems are those in which there is a multiphysic coupling of the governing equations for structural and fluid dynamics.

In this work, the development of a computational tool able to solve fluid structure interaction problems is sought. For this purpose, an ImmALE approach is used. The latter combines properties of the immersed domains method and the Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formulation. The code is implemented using the Parallelized General Purpose Finite Element Platform PARGPFEP, which was developed in the Computational Mechanics Department at the Bariloche Atomic Center.

To begin with, a description of the developed code and the theoretic fundamentals behind it is presented. After that, a validation of the presented code using problems with known solutions is performed. On a first stage, the proposed code is used to calculate the deflection of a cantilever beam with a concentrated load on its free end. The numerical solution is then compared with the analytical solution obtained by applying the Euler-Bernoulli beam theory. Secondly, the code is used to solve the problem of an incompressible flow throughout a two-dimensional channel partially obstructed by an elastic rectangular solid body. The solution is then compared with a known analytical solution. After this, a solution for the flow throughout a three-dimensional channel with an elastic cylindrical obstruction is computed. For a particular range of Reynolds numbers, a Von Kármán Vortex street is observed. The vortex shedding frequency obtained with the numerical method is then compared with the one given by empirical correlations. Finally, the influence of this phenomenon over the solid body is studied.

Keywords: FLUID-SOLID INTERACTION, FINITE ELEMENTS METHOD, COMPUTATIONAL ELASTODYNAMICS, COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS, VON KÁRMÁN VORTEX STREET.

Capítulo 1

Introducción

Los problemas de interacción fluido-estructura (FSI, por sus siglas en inglés) son comunes en el ámbito ingenieril. El diseño de bombas peristálticas para el bombeo de flujo sanguíneo en bioingeniería, el modelado de las alas de un avión en el área aeroespacial, el estudio de las vibraciones inducidas en elementos combustibles de un reactor nuclear o el estudio del comportamiento de válvulas y compuertas son ejemplos de problemas de interacción fluido-estructura. En la figura 1.1, se muestra a modo de ejemplo, el flujo a través de una válvula aórtica prostética.

Los problemas de FSI son problemas en los cuales hay un acoplamiento multifísico entre la mecánica de sólidos y la mecánica de fluidos. En los mismos interactúan una o varias estructuras, que pueden ser rígidas o deformables, con uno o varios fluidos.

Este tipo de fenómenos abarca una gran cantidad de problemas de diversa complejidad. En general, no se puede hallar una solución analítica que aproxime al comportamiento real de estos sistemas. En particular, los problemas de FSI donde hay grandes desplazamientos de la estructura son intrínsecamente no lineales. Esto se debe a que las velocidades y presiones en el flujo provocan grandes desplazamientos en el sólido que, a su vez, generan cambios en el campo de velocidades y presiones del fluido. Esto deriva en la necesidad de resolver dichos problemas de forma acoplada.

A medida que se incrementa el poder de cálculo de las computadoras modernas, se pueden resolver problemas más complejos, como lo son los problemas de FSI, en particular los mencionados anteriormente. “Resulta de gran importancia realizar las aproximaciones apropiadas a cada tipo de problema de FSI para lograr obtener una solución que represente correctamente los fenómenos físicos que se desean observar sin incurrir en costos computacionales demasiado altos” [7].

“Hoy en día, los desafíos respecto al modelado matemático, técnicas de discretización y solución numérica, así como el desarrollo de códigos computacionales robustos, flexibles y eficientes siguen siendo enormes” [8].

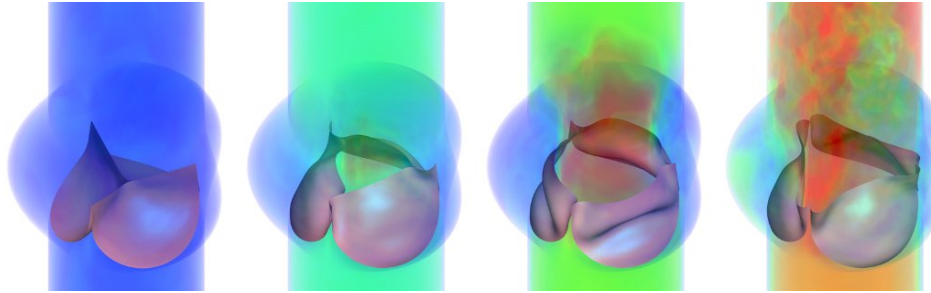


Figura 1.1: Simulación de una válvula aórtica prostética. Imagen tomada del trabajo de Luraghi, G. et al. [1].

1.1. Interacción Fluido Estructura

Los problemas de FSI pueden clasificarse según la intensidad del acoplamiento multifísico de la siguiente manera:

Problemas desacoplados: Cuando los desplazamientos en la estructura son suficientemente pequeños y las variaciones temporales de los mismos son lentas (del orden de $1Hz$), la influencia del sólido sobre el campo de velocidades y de presiones del fluido es despreciable. Por lo tanto, en estos casos se puede resolver el problema fluidodinámico considerando que la estructura está fija, hallando luego los desplazamientos y/o tensiones generados en la estructura como consecuencia de la acción dinámica del fluido.

Interacción Acústico-Estructural: Cuando los desplazamientos de la estructura son pequeños, pero las oscilaciones de la misma son de alta frecuencia (mayores a $1Hz$) se generan ondas de presión en el fluido. En estos casos se estudia la respuesta en frecuencia del sólido ante la excitación del fluido.

Problemas acoplados: Cuando los desplazamientos en el sólido son lo suficientemente grandes como para modificar de manera apreciable los campos de velocidades y presiones en el fluido, se habla de un problema acoplado de FSI. Este es el caso más complejo, el cual se debe resolver de forma iterativa. El enfoque usual para ello consiste en hallar los campos de velocidades y presión del fluido para la condición inicial del sólido, luego calcular la respuesta dinámica del sólido para las condiciones del fluido obtenidas, y una vez halladas, colocarlas como condiciones iniciales para la siguiente iteración.

En todos los casos, la estructura puede estar compuesta tanto de un sólido rígido como deformable (o una combinación de partes rígidas y deformables). El fluido puede ser compresible o incompresible, viscoso o no viscoso, Newtoniano o No-newtoniano. El flujo puede estar contenido dentro del sólido como en el caso del flujo a través de un ducto, o puede darse que el sólido esté parcial o totalmente inmerso en el fluido, como en el caso del ala de un avión.

En el presente trabajo se centrará la atención en el estudio de problemas de FSI acoplados de sólidos elásticos totalmente inmersos en un flujo Newtoniano, e incompresible.

1.2. Generalidades sobre el método de los elementos finitos

En el desarrollo del trabajo se presentarán los modelos matemáticos empleados para modelar el comportamiento de los sólidos y fluidos involucrados en el problema de FSI. Para encontrar los campos de presiones y velocidades del fluido y los campos de desplazamientos y velocidades en el sólido se utilizará un método numérico. El mismo se basa en el método de los elementos finitos para resolver tanto las ecuaciones del fluido como las del sólido.

El método de los elementos finitos es una generalización del método variacional clásico (Rayleigh-Ritz) y de los métodos de residuos pesados (Galerkin). Mediante éste se busca resolver una ecuación diferencial con valores de frontera realizando una discretización del dominio, que recibe el nombre de triangulación o malla, a la manera esquematizada en la figura 1.2. A continuación, se establece un conjunto de funciones base, que generan un subespacio de dimensión finita del espacio (en general de dimensión infinita) en el cual está contenida la solución del problema. Luego, se postula que la solución numérica será una combinación lineal de estas funciones base y se hallan los coeficientes de la misma. Esto se hace buscando minimizar un funcional proporcional al error. Las funciones base deben elegirse de forma tal que cumplan las condiciones de contorno impuestas sobre la frontera del dominio. En general se seleccionan funciones sencillas como polinomios de bajo orden.

Es importante destacar que una fuente importante de error numérico radica en la discretización del dominio. Es una buena práctica del usuario del método asegurarse de elegir mallas adecuadas para la resolución del problema. En general se resuelve el problema con varias mallas distintas para asegurarse que la solución es correcta.

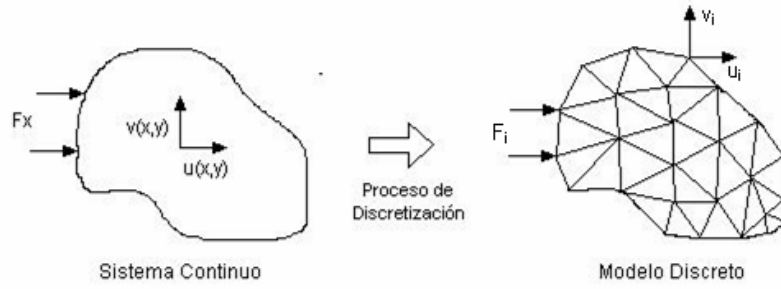


Figura 1.2: Discretización de un dominio bidimensional.

1.3. Objetivo

El objetivo del presente trabajo es generar una herramienta computacional capaz de resolver distintos tipos de problemas de FSI. En particular problemas que involucren sólidos isotropos linealmente elásticos totalmente inmersos un fluido Newtoniano, viscoso e incompresible. Se busca que la herramienta permita modelar la evolución de sistemas multifísicos en transitorios temporales.

1.4. Organización del Trabajo

El trabajo estará organizado de la siguiente forma: en primer lugar se mostrarán los modelos matemáticos empleados para modelar el comportamiento del fluido, el sólido y la interacción entre los mismos. Se expondrá la formulación fuerte de los problemas acoplados a resolver y se derivará a partir de los mismos la formulación débil sobre la cual se aplica el método de los elementos finitos. Se discutirán diferentes enfoques para modelar problemas de FSI, entre ellos los esquemas inmersos, el método Euleriano-Lagrangiano Arbitrario (ALE por sus siglas en inglés) y el método immALE [9] que consiste en un método híbrido entre los dos anteriores.

Una vez obtenidos los problemas algebraicos a resolver, se comentará acerca del método de integración en el tiempo elegido: el método de Newmark o Método Θ .

Luego se explicará el funcionamiento del código desarrollado, particularmente sobre la forma de realizar el acople fluido-sólido.

En el capítulo subsiguiente se expondrán los resultados obtenidos utilizando el código desarrollado. Se realizará una comparación de los resultados numéricos obtenidos con resultados analíticos para los casos sencillos (como el caso del movimiento de un obstáculo prismático en un flujo pistón).

Finalmente se utilizará el código para resolver un problema tridimensional. Se simulará un flujo adentro de una cavidad con condición de deslizamiento en las paredes laterales, obstruido por un cilindro sólido. Para ciertos números de Reynolds se observa la generación de una calle de vórtices de Von Kármán. Se analizarán las oscilaciones que los vórtices generan en el cilindro, particularmente el cambio de amplitud en las mismas al acercarse la frecuencia de desprendimiento de los mismos a la frecuencia de resonancia del cilindro.

Capítulo 2

Interacción Fluido - Sólido Elástico

En este capítulo se abordarán dos temas fundamentales. Primero se describirán los enfoques más empleados en la literatura para resolver problemas de FSI, que son los esquemas ALE y los esquemas inmersos, para concluir en el esquema immALE, que es el empleado en este trabajo.

Se desarrollará la formulación matemática empleada en el código implementado comenzando por la formulación fuerte de los problemas del fluido y el sólido. Luego se obtendrá la formulación débil de los problemas y se aplicará el método de los elementos finitos sobre la discretización del dominio.

2.1. Métodos Monolíticos y Métodos Particionados

El primer paso para resolver un problema de FSI consiste en decidir si utilizar un esquema de resolución monolítico o particionado. Los esquemas monolíticos se caracterizan por tratar la física de la estructura y la mecánica del fluido como un mismo problema matemático, como se observa en la figura 2.1. Se ensambla un único sistema de ecuaciones que permite obtener la solución correspondiente a la estructura y la solución del fluido en forma simultánea, mediante un algoritmo unificado. Las condiciones en la interfaz fluido-sólido quedan implícitas en la solución obtenida. Este enfoque permite, potencialmente, alcanzar una mejor estabilidad del método para un problema multidisciplinario, pero requiere un mayor nivel de especialización en la etapa de desarrollo del algoritmo. Por el contrario, el esquema particionado implica modelar matemáticamente el problema del fluido y el problema de la estructura por separado como dos problemas que pueden ser resueltos usando mallas distintas y, eventualmente,

métodos numéricos diferentes para cada uno. Las condiciones en la interfaz se calculan explícitamente ya que se utilizan para transmitir información entre los problemas del fluido y del sólido. Este enfoque permite aprovechar los algoritmos ya desarrollados (en un grado bastante avanzado en los últimos años) en las áreas de Mecánica de Fluidos y Mecánica de Sólidos. Sin embargo, se debe prestar especial atención al seguimiento de la interfaz y sus cantidades relacionadas. Esto puede resultar costoso y ser una fuente importante de error.

En el presente trabajo se utiliza un enfoque particionado, con el objeto de sacar provecho a la amplia experiencia que posee el departamento de Mecánica Computacional del Centro Atómico Bariloche en el desarrollo de códigos para resolver problemas de mecánica de sólidos y mecánica de fluidos.

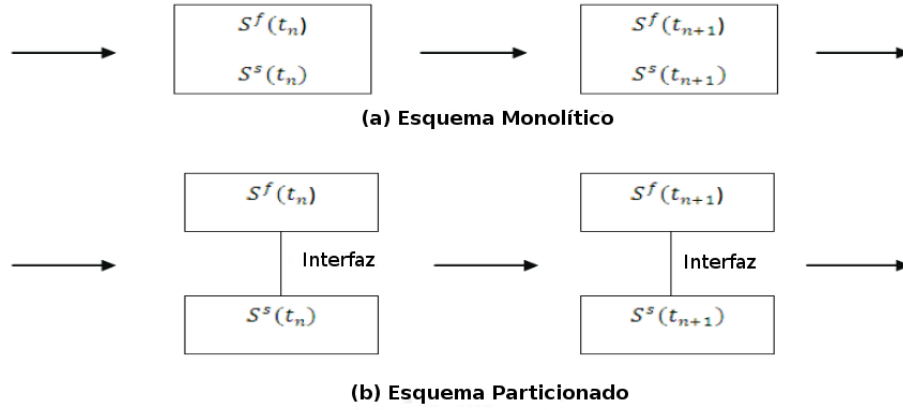


Figura 2.1: Diagrama de un esquema Monolítico (a) y un esquema Particionado (b) para problemas de FSI, donde S_f y S_s denotan las soluciones del fluido y del sólido, respectivamente. Imagen tomada del trabajo de Hou, G. H. et al. [2].

2.2. Método ALE

2.2.1. Formulación Lagrangiana

En una formulación Lagrangiana los nodos de la malla se mueven de forma solidaria a los nodos del material, así como se puede observar en la figura 2.2. Este tipo de formulaciones es especialmente adecuada para problemas de mecánica de sólidos. Permite un fácil rastreo de superficies libres e interfaces entre materiales. Además facilita el tratamiento de materiales con propiedades reológicas o materiales con memoria de forma. La desventaja de este tipo de descripción es que en caso de haber grandes deformaciones del material los elementos de la malla se deforman marcadamente per-

judicando la precisión del cálculo. Esto hace necesario efectuar complejas operaciones de remallado.

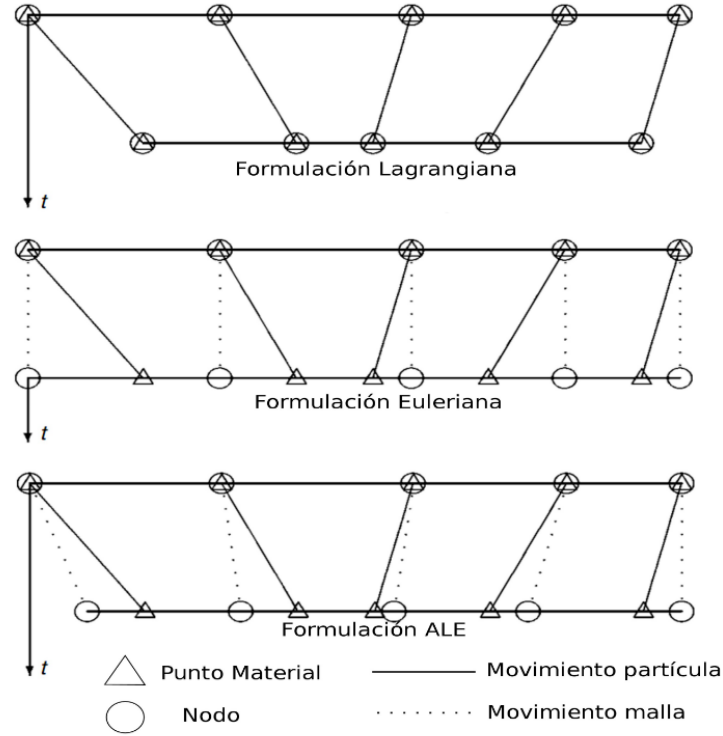


Figura 2.2: Explicación unidimensional de la formulación Lagrangiana, Euleriana y ALE de movimiento. Imagen adaptada del trabajo de Figueroa A. A. et al [3].

2.2.2. Formulación Euleriana

En una descripción Euleriana de un problema, la malla permanece fija al sistema de referencia y el material se desplaza sobre ella, como se observa en la figura 2.2. Este tipo de esquema es ampliamente utilizado en mecánica de fluidos. Permite trabajar fácilmente con sistemas en los que las partículas del medio continuo tienen grandes desplazamientos. Las desventajas de este enfoque son la aparición de términos convectivos debidos al movimiento relativo entre la malla y el material, que pueden complejizar el modelado matemático del problema, y la dificultad para el seguimiento preciso de superficies libres o interfases con otros materiales.

2.2.3. Formulación ALE

La formulación ALE combina las ventajas de las dos descripciones antes señaladas minimizando las desventajas tanto como es posible. En este caso, los nodos de la

mallas pueden moverse solidarios con el material (formulación Lagrangiana), pueden estar fijos al sistema de referencia (formulación Euleriana), o bien, como se sugiere en la figura 2.2, pueden moverse de forma arbitraria (en general se mueven de una forma convenientemente elegida). Dada esta libertad en el movimiento de los nodos del dominio computacional, se pueden admitir grandes distorsiones con una mayor precisión en la solución.

Por lo anterior, la formulación ALE es especialmente práctica para resolver problemas de FSI. Para el caso en el que el fluido es viscoso, las partículas de fluido en la interfaz fluido-sólido no se mueven con respecto a las partículas del sólido, debido a la condición de adherencia. La malla del fluido se ajusta al contorno del sólido. El problema del fluido se resuelve como un problema de frontera móvil, luego se calculan los esfuerzos que el fluido ejerce sobre el sólido para utilizarlos como condiciones de contorno en el problema asociado al mismo. Se selecciona un enfoque Lagrangiano para los nodos del fluido que se encuentran en la interfaz fluido-sólido (se presupone que los desplazamientos en la misma serán mucho menores que los desplazamientos de las partículas del fluido, lo cual es cierto en la mayoría de los casos), y se selecciona un enfoque Euleriano para los nodos del resto del contorno del dominio del fluido. Los nodos del resto de la malla del fluido se moverán de forma arbitraria. De esta forma, se logra obtener un seguimiento preciso de la interfaz fluido-sólido, a expensas de un incremento en la necesidad de remallado en el caso en que los desplazamientos del cuerpo sólido sean demasiado grandes.

2.3. Métodos de sólidos inmersos

Otro abordaje para los problemas de FSI son los llamados métodos de sólidos inmersos. Principalmente existen tres tipos de esquemas de sólidos inmersos: el esquema de frontera inmersa, el esquema de dominios inmersos y el esquema de multiplicadores de Lagrange distribuidos. Este último se basa en la idea de simular el volumen ocupado por el sólido como un fluido ficticio cuyas propiedades son las mismas que las del sólido (densidad, módulo de compresibilidad, etc). En este caso, la malla del fluido permanece fija al sistema de referencia, se utiliza una descripción Euleriana del problema y el sólido impone condiciones de contorno al fluido a través de multiplicadores de Lagrange. Esto significa que se resuelven las ecuaciones del fluido con un campo incógnita extra (además del campo de velocidades y el de presión) constituido por los multiplicadores de Lagrange. Los mismos surgen al imponer, sobre el campo de velocidades en los nodos de la malla del fluido que están dentro del dominio del sólido, la condición de que el fluido ficticio se debe mover a la misma velocidad que el sólido. En este sentido los

multiplicadores de Lagrange representan la "fuerza" que debe ejercerse sobre el fluido ficticio para que se mueva solidario con el sólido. Luego, esta misma fuerza será la fuerza aplicada sobre la estructura a la hora de resolver el problema del sólido. Esta descripción permite eliminar la necesidad de remallar continuamente la malla del fluido, además de mantener intacta la topología de la misma (se conserva la cantidad de nodos y las conectividades). Sin embargo, adolece de las mismas desventajas de un enfoque Euleriano, ya que al no seguir los nodos en la malla del fluido al contorno del sólido se requiere realizar interpolaciones para poder conocer los valores de los campos incógnitas en la interfaz y la solución tendrá un orden de precisión menor. Los esquemas inmersos han sido previamente estudiados en mayor profundidad por Hou, G. et al. [2].

2.4. Método ImmALE

Como se mencionó anteriormente, en el presente trabajo se utilizará un híbrido entre el algoritmo inmerso de multiplicadores de Lagrange distribuidos y el esquema ALE. Se busca combinar los aspectos atractivos de ambos métodos y reducir tanto como sea posible las desventajas de cada uno.

El algoritmo consiste en un esquema particionado (se resuelven las ecuaciones del fluido y las del sólido por separado). Se utiliza una malla ajustada al contorno del sólido para el fluido, y los nodos en la malla del fluido siguen a la interfaz fluido-sólido de manera análoga a como se realiza en el esquema ALE, pero además se agrega un fluido ficticio en la región de la malla del fluido que estaría ocupada por el sólido. El fluido ficticio tiene las mismas propiedades que el sólido, al igual que en el método inmerso, pero en este caso los nodos de la malla del fluido que pertenecen al fluido ficticio, se moverán de manera solidaria a la estructura. Los nodos del borde de la malla del fluido permanecerán fijos, y todos los nodos que no cumplan la condición de estar en el borde ni la de estar dentro del dominio del sólido tendrán un desplazamiento y una velocidad intermedios entre el desplazamiento y velocidad del sólido y cero, respectivamente. Lo anterior se propone de manera que haya una transición suave en los desplazamientos y velocidades de la malla. Es claro que el hecho de utilizar una formulación ALE deriva en la necesidad de agregar dos campos incógnita extras al problema del fluido, que son los desplazamientos y velocidades de los nodos de la malla del fluido.

Además, se deberá agregar el campo incógnita de los multiplicadores de Lagrange para imponer la condición que ha de cumplir la velocidad del fluido ficticio así como se propone en el método inmerso. De esta forma, se puede modelar la interacción entre el fluido y la estructura usando los multiplicadores de Lagrange, que una vez calculados

en el problema del fluido, serán transferidos al problema del sólido como las fuerzas aplicadas sobre el mismo.

Ya que en este caso híbrido se realiza un seguimiento de la interfaz fluido-sólido, a diferencia del método puramente inmerso, se espera obtener una representación mucho más precisa de la misma. Además, a diferencia de un método puramente ALE, no es necesario imponer una condición de contorno extra en la interfaz en el problema del fluido, ya que los multiplicadores de Lagrange se agregan “naturalmente” al problema del fluido como fuerzas volumétricas. Tampoco se requiere que la malla del fluido no tenga nodos en donde se encuentra el sólido, dejando un agujero. Esto permite preservar la topología de la malla y facilita las operaciones de remallado, que se reducen al mero reposicionamiento de los nodos. El remallado sólo es necesario cuando el desplazamiento del sólido inmerso provoca una deformación inaceptable en los elementos. En caso de considerarse necesario, el mismo se efectúa una vez transcurrido un número fijo de pasos de tiempo. El funcionamiento de este código fue abordado en profundidad por Dari, E. A. et al. [9] y se explica en mayor detalle en la sección 3.2 de este trabajo.

2.5. Modelo matemático

Una vez seleccionados los esquemas en los que trabajaremos, se procede a mostrar los modelos matemáticos empleados para la resolución del problema de FSI.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_d}$ ($n_d = 2, 3$) un dominio abierto y acotado del espacio que no varía con el tiempo, que está dividido en dos subdominios dependientes del tiempo Ω_f^t y Ω_s^t como se observa en la figura 2.3 (por simplicidad se muestra un dominio bidimensional). Ω_f^t y Ω_s^t representan al dominio del fluido y el del sólido, respectivamente. Se tiene que $\Omega = (\Omega_f^t \cup \Omega_s^t)$, con $\Omega_f^t \cap \Omega_s^t = \emptyset$, donde Γ_f^t y Γ_s^t , son las fronteras correspondientes al dominio fluido y al dominio sólido respectivamente, que pueden descomponerse como $\Gamma_f^t = \Gamma_{fD} \cap \Gamma_{fN} \cap \Gamma_{fs}^t$ y $\Gamma_s^t = \Gamma_{sD} \cap \Gamma_{fs}^t$. Aquí Γ_{fD} y Γ_{sD} son fronteras de Dirichlet mientras que Γ_{fN} es una frontera de Neumann, todas éstas independientes del tiempo. Se considera que para todo tiempo t el sólido se encuentra totalmente inmerso en el fluido. Γ_{fs}^t es la superficie de la interfaz fluido-sólido. Las normas unitarias salientes son denotadas \mathbf{n}_f y \mathbf{n}_s para Γ_f^t y Γ_s^t , respectivamente, y en particular se toma $\mathbf{n}_{f|\Gamma_{fs}^t} = \mathbf{n}_{fs}$ y $\mathbf{n}_{s|\Gamma_{fs}^t} = \mathbf{n}_{sf} = -\mathbf{n}_{fs}$ en la interfaz fluido-sólido.

El problema es intrínsecamente dependiente del tiempo, y no se realizan simplificaciones a priori respecto a efectos dinámicos. Los desplazamientos en el sólido pueden ser arbitrariamente grandes. El campo de velocidad se denota con la letra \mathbf{v} , siendo

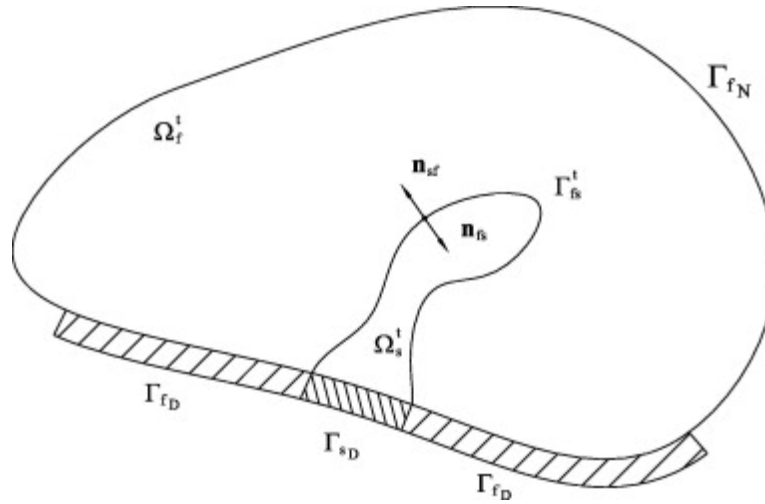


Figura 2.3: Esquema general de un problema de FSI. Imagen tomada del trabajo de Blanco P. J. et al. [4].

$\mathbf{v}_{\Omega_f^i}^t = \mathbf{v}_f$ y $\mathbf{v}_{\Omega_s^i}^t = \mathbf{v}_s$, mientras que el vector desplazamientos para el sólido se denota \mathbf{u}_s . Tanto el sólido como el fluido pueden ser independientemente incompresibles o levemente compresibles, siendo κ_f y κ_s los módulos de compresibilidad del fluido y del sólido, respectivamente. Los tensores de tensiones de Cauchy para el fluido y el sólido son $\boldsymbol{\sigma}_f = -p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}$ y $\boldsymbol{\sigma}_s = -p_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{sD}$, donde p_f y p_s son las componentes de presión hidrostática del fluido y del sólido, respectivamente, e \mathbf{I} es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{n_d \times n_d}$. Por el momento, se dejan σ_{fD} y σ_{sD} expresadas en su forma genérica, haciendo la formulación matemática válida para cualquier comportamiento constitutivo de los materiales. En las secciones subsiguientes de este capítulo se expresará la forma específica de ambos tensores utilizada en el código. Las densidades del fluido y del sólido son ρ_f y ρ_s , y las fuerzas gravitatorias (si las hubiere) se expresan mediante la letra \mathbf{g} . Los valores prescritos en las fronteras de Dirichlet Γ_{fD} y Γ_{sD} son \mathbf{v}_f y \mathbf{u}_s , respectivamente, y \mathbf{t}_f son las tensiones impuestas en la frontera de Neumann del fluido Γ_{fN} .

En adelante se denotará con (\cdot) a las variaciones admisibles (en el marco del principio variacional) del campo incógnita (\cdot) , por ejemplo $\hat{\mathbf{v}}$ es una variación admisible del campo \mathbf{v} . Además se denotan las condiciones iniciales del problema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{f|t=0} &= \mathbf{v}_{f0} & \text{en } \Omega_f^0, \\ \mathbf{u}_{s|t=0} &= \mathbf{u}_{s0} & \text{en } \Omega_s^0, \\ \mathbf{v}_{s|t=0} &= \mathbf{v}_{s0} & \text{en } \Omega_s^0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Al establecer las condiciones iniciales se debe tener en cuenta que se debe cumplir la

condición de continuidad de las velocidades en la interfaz fluido-sólido: $\mathbf{v}_{f0|\Gamma_{fs}^0} = \mathbf{v}_{s0|\Gamma_{fs}^0}$.

Una vez que se tiene definido el problema de FSI cómo se describió anteriormente, se introduce la formulación correspondiente al problema de dominios inmersos: se asume que en Ω_s^t existe un fluido ficticio cuyos campos de velocidad y presión se denotan también (\mathbf{v}_f, p_f) . En esta instancia, se tienen varios grados de libertad para elegir, por ejemplo, la magnitud de la densidad y la viscosidad de este fluido ficticio, que son denotados por las letras ρ_{ff} y μ_{ff} . Por simplicidad se definirá, haciendo un abuso de notación, la función partida $\rho_f = \{\rho_f \text{ in } \Omega_f^t \wedge \rho_{ff} \text{ in } \Omega_s^t\}$. Se considera también que el tensor de tensiones de Cauchy en el fluido ficticio se escribe de igual forma que el del fluido real, es decir $\boldsymbol{\sigma}_f = -p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}$, donde $\boldsymbol{\sigma}_{fD}$ tiene las mismas propiedades que en el fluido real. En este caso, el módulo de compresibilidad del fluido ficticio debe ser igual al módulo de compresibilidad del sólido κ_s , para que se cumpla la condición de continuidad del campo de velocidades sobre todo el dominio del sólido Ω_s^t . Es decir, que se cumpla que \mathbf{v}_f es igual a \mathbf{v}_s en algún sentido (en el caso de este trabajo en el sentido de $\mathbf{H}^1(\Omega_s^t)$). La condición de continuidad antes mencionada se relaja introduciendo un multiplicador de Lagrange apropiado, ψ .

Teniendo en cuenta lo mencionado en los párrafos anteriores y otras consideraciones estudiadas mas ampliamente por Blanco, P. J. et al. [4], se obtiene la siguiente formulación fuerte para el problema de FSI: Para cada $t \in (0, T)$ Hallar $(\mathbf{v}, p, \psi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{P} \times \Psi$, tales que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \text{div} \boldsymbol{\sigma}_{fD} + \nabla p_f = \rho_f \mathbf{g} & \text{en } \Omega_f^t, \\ \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \text{div} \boldsymbol{\sigma}_{fD} + \nabla p_f = \rho_f \mathbf{g} + \psi & \text{en } \Omega_s^t, \\ \rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} - \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \text{div}(\boldsymbol{\sigma}_{sD} - \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \\ + \nabla(p_s - p_f) = (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} - \psi & \text{en } \Omega_s^t, \\ \text{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} = 0 & \text{en } \Omega_f^t, \\ \text{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_f}{Dt} = 0 & \text{en } \Omega_s^t, \\ \text{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} = 0 & \text{en } \Omega_s^t, \\ (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \cdot \mathbf{n}_f = \bar{\mathbf{t}}_f & \text{en } \Gamma_{fN}, \\ (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD})^f \cdot \mathbf{n}_{fs} = (-p_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{sD})^s \cdot \mathbf{n}_{fs} = (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD})^s \cdot \mathbf{n}_{fs} & \text{en } \Gamma_{fs}^t, \\ \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_f & \text{en } \Omega_s^t, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Donde $(\cdot)^f$ y $(\cdot)^s$ son cantidades en la interfaz Γ_{fs}^t aproximándose a la misma desde el dominio Ω_f^t y Ω_s^t , respectivamente. Además $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_f, \mathbf{v}_s)$, $p = (p_f, p_s)$, con (\mathbf{v}_f, p_f) definidos sobre todo el dominio Ω . Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \{(\mathbf{v}_f, \mathbf{v}_s) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s^t) : \mathbf{v}_f|_{\Gamma_{fD}} = \bar{\mathbf{v}}_f \wedge \mathbf{v}_s|_{\Gamma_{sD}} = \bar{\mathbf{v}}_s\}, \\ \mathcal{P} &= \{(p_f, p_s) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega_s^t)\}, \\ \Psi &= \mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Además se define \mathcal{V} como el espacio obtenido al hacer la diferencia entre los elementos del espacio \mathcal{U} .

Las primeras tres ecuaciones representan la ley de conservación del momento lineal, respectivamente en los volúmenes del fluido, del fluido ficticio y del sólido. Es importante destacar que sumando la segunda ecuación a la tercera, se obtiene la ley de conservación del momento lineal usual en el sólido. Esto indica que la formulación aquí presentada es consistente con el problema real. La cuarta, quinta y sexta ecuación representan la ley de conservación de la masa, respectivamente para el fluido, el fluido ficticio y el sólido. La séptima ecuación representa la condición de borde de tipo Neumann en la frontera correspondiente del fluido real. La octava implica que no hay un salto de tensión en la interfaz fluido-sólido y la novena es la condición de continuidad de las velocidades entre el fluido ficticio y el sólido real en el dominio del sólido.

Aplicando el principio variacional se llega a la siguiente formulación débil del problema: Para cada $t \in (0, T)$ hallar $(\mathbf{v}, p, \psi) \in \mathcal{U} \times \mathcal{P} \times \Psi$, tales que

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{fN}} \bar{\mathbf{t}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} \right) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_f \left(\frac{1}{\kappa_f} - \frac{1}{\kappa_s} \right) \frac{Dp_f}{Dt} d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega_s^t} \left[\left(\rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} - \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + (\boldsymbol{\sigma}_{sD} - \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_s) - (p_s - p_f) \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_s - (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right] d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_s \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} \right) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^t} \hat{\psi} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^t} \psi \cdot (\hat{\mathbf{v}}_s - \hat{\mathbf{v}}_f) d\mathbf{x} = 0 \\ & \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}, \hat{\psi}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P} \times \Psi,\end{aligned}\tag{2.4}$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}((\cdot))$ es el operador gradiente simétrico de (\cdot) , esto es:

$$\varepsilon((\cdot)) = \frac{\nabla(\cdot) + \nabla(\cdot)^T}{2}. \quad (2.5)$$

Queda pendiente en el análisis especificar las ecuaciones constitutivas empleadas para el fluido y el sólido. El esquema anterior representa el problema monolítico de fluido estructura. El mismo es resuelto utilizando iteraciones de punto fijo. Es decir, se particiona el problema en dos problemas principales, el del fluido y el del sólido. La solución del problema acoplado se obtiene realizando iteraciones entre estos dos problemas usando el método de Gauss-Seidel (G-S) con subrelajación.

2.5.1. Ecuaciones del fluido

Las ecuaciones que rigen el comportamiento del fluido en el código desarrollado son las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo Newtoniano, viscoso e incompresible. En este caso el tensor de tensiones de Cauchy será dependiente de las velocidades de deformación como sigue:

$$\boldsymbol{\sigma}_f = p_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD} = (2\mu \mathbb{I} + \lambda(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}))\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f) = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f) + \lambda(\text{div}\mathbf{v}_f)\mathbf{I}, \quad (2.6)$$

donde μ y λ son la viscosidad dinámica y la viscosidad volumétrica o dilatacional, respectivamente e \mathbb{I} es el tensor identidad de cuarto orden. La formulación variacional para el problema del fluido puede obtenerse al igualar a cero las variaciones en las incógnitas asociadas al fluido en el problema 2.4. De esta manera el problema se reduce a: para cada $t \in (0, T)$ hallar $(\mathbf{v}_f, p_f, \boldsymbol{\psi}) \in \mathcal{U}^f \times \mathcal{P}^f \times \boldsymbol{\Psi}$ tales que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - p_f \text{div}\hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{fN}} \bar{\mathbf{t}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \hat{p}_f \left(\text{div}\mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} \right) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_f \left(\frac{1}{\kappa_f} - \frac{1}{\kappa_s} \right) \frac{Dp_f}{Dt} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^t} \hat{\boldsymbol{\psi}} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\psi} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_f) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{p}_f, \hat{\boldsymbol{\psi}}) \in \mathcal{V}^f \times \mathcal{P}^f \times \boldsymbol{\Psi}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde los espacios \mathcal{U}^f , \mathcal{P}^f y $\boldsymbol{\Psi}$ son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}^f &= \{\mathbf{v}_f \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{v}_f|_{\Gamma_{fD}} = \bar{\mathbf{v}}_f\}, \\
\mathcal{P}^f &= \{p_f \in L^2(\Omega)\}, \\
\Psi &= \mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Además se define \mathcal{V}^f como el espacio de variaciones admisibles de los elementos del espacio \mathcal{U}^f .

Por lo tanto, resolviendo el problema 2.7 se obtienen los campos de velocidad, presiones y los multiplicadores de Lagrange (fuerzas) del fluido. Para hallar los dos campos incógnita restantes, que son las velocidades \mathbf{v}_m y desplazamientos \mathbf{u}_m de los nodos de la malla del fluido, que como se mencionó anteriormente surgen de la necesidad de usar una malla que sigue el movimiento del sólido, se resuelven sendos problemas de Dirichlet, como se observa a continuación. Para cada $t \in (0, T)$ hallar $\mathbf{v}_m \in \mathcal{V}^*$ tal que

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{v}_m = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{v}_m = 0 & \text{en } \Gamma_{fD} \cup \Gamma_{fN}, \\ \mathbf{v}_m = \mathbf{v}_s & \text{en } \Omega_s^t. \end{cases} \tag{2.9}$$

Y para cada $t \in (0, T)$ hallar $\mathbf{u}_m \in \mathcal{U}^*$ tal que

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_m = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u}_m = 0 & \text{en } \Gamma_{fD} \cup \Gamma_{fN}, \\ \mathbf{u}_m = \mathbf{u}_s & \text{en } \Omega_s^t, \end{cases} \tag{2.10}$$

donde los espacios \mathcal{V}^* y \mathcal{U}^* son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^* &= \{\mathbf{v}_m \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{v}_m|_{(\Gamma_{fD} \cup \Gamma_{fN})} = 0 \wedge \mathbf{v}_m|_{\Omega_s^t} = \mathbf{v}_s\} \\
\mathcal{U}^* &= \{\mathbf{u}_m \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{u}_m|_{(\Gamma_{fD} \cup \Gamma_{fN})} = 0 \wedge \mathbf{u}_m|_{\Omega_s^t} = \mathbf{u}_s\}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Luego se aplica el método de Galerkin sobre una triangulación del dominio, y se utiliza el método theta [10] para obtener aproximaciones de las derivadas temporales de la misma forma en que ha sido realizado por Blanco P. J. et al. [11] y otros [9, 12].

2.5.2. Ecuaciones del Sólido

Para hallar la solución asociada al dominio del sólido se utiliza la ecuación constitutiva de un sólido elástico lineal isótropo homogéneo. La misma está representada por las ecuaciones de Lamé-Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma}_s = -p_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{sD} = \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_s) = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_s)) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_s), \quad (2.12)$$

donde \mathbb{C} es el tensor de cuarto orden correspondiente al material isótropo y λ y μ son el primer y segundo parámetro de Lamé, respectivamente. Luego, el módulo de compresibilidad es $\kappa_s = \lambda + \frac{2\mu}{3}$. Utilizando esta ecuación constitutiva, el problema del sólido puede escribirse en forma débil de la siguiente manera: para cada $t \in (0, T)$ hallar $(\mathbf{v}_s, p_s) \in \mathcal{U}^s \times \mathcal{P}^s$ tales que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s^t} \left[\left(\rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} - \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + (\boldsymbol{\sigma}_{sD} - \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_s) - (p_s - p_f) \text{div} \hat{\mathbf{v}}_s - (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right] d\mathbf{x} \\ - \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_s \left(\text{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} \right) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\psi} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_s) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}_s, \hat{p}_s) \in \mathcal{V}^s \times \mathcal{P}^s, \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde, los espacios \mathcal{U}^s y \mathcal{P}^s son:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^s &= \{ \mathbf{v}_s \in \mathbf{H}^1(\Omega_s^t) : \mathbf{v}_s|_{\Gamma_{sD}} = \bar{\mathbf{v}}_s \}, \\ \mathcal{P}^s &= \{ p_s \in L^2(\Omega_s^t) \}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

Además se define \mathcal{V}^s como el espacio de variaciones admisibles de los elementos del espacio \mathcal{U}^s .

Resulta más conveniente utilizar los desplazamientos y las velocidades como incógnitas en el sólido, en vez de las presiones y las velocidades. Entonces reescribiendo el problema 2.13 en términos de estas nuevas variables, y poniendo en el lado derecho de la ecuación los términos en los que sólo aparecen variaciones de las incógnitas del problema y no las incógnitas en sí mismas, se obtiene el siguiente problema: para cada $t \in (0, T)$ hallar $(\mathbf{u}_s, \mathbf{v}_s) \in \mathcal{W}^s \times \mathcal{U}^s$ tales que:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_s^t} \left[\rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}_s) : \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_s) \right] d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Omega_s^t} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_s) - p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_s + (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right] d\mathbf{x} \\
&+ \int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\psi} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_s) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}_s, \hat{p}_s) \in \mathcal{V}^s \times \mathcal{P}^s
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Para su resolución numérica, el problema anterior se discretiza utilizando el método de Galerkin. El espacio de dimensión infinita $H^1(\Omega_s^t)$ es reemplazado por el subespacio de dimensión finita \mathcal{H} . Se denotan $\bar{\mathbf{u}}_{sh}$ y $\bar{\mathbf{v}}_{sh}$ a las proyecciones de $\bar{\mathbf{u}}_s$ y $\bar{\mathbf{v}}_s$ en el subespacio \mathcal{H} . Luego, se realiza una triangulación del dominio Ω_s^t , la cual se denomina \mathcal{T} y \mathcal{N}_s es entonces el conjunto de todos los N nodos en la triangulación. El conjunto $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_{Nn_d}\} = \{\varphi_1 \mathbf{e}_1, \dots, \varphi_1 \mathbf{e}_{n_d}, \dots, \varphi_N \mathbf{e}_{n_d}\}$ es una base nodal del subespacio \mathcal{H} . En este trabajo se utilizan funciones polinómicas de grado 1, representadas esquemáticamente para un dominio 2D en la figura 2.4. Mediante estas funciones se pretende lograr una aproximación a la solución del problema que esté contenida en el subespacio \mathcal{H} , por lo tanto la misma es una combinación lineal de las funciones base:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{sh} &= \sum_{i=1}^{Nn_d} V_i \boldsymbol{\eta}_i \\
\mathbf{u}_{sh} &= \sum_{i=1}^{Nn_d} U_i \boldsymbol{\eta}_i
\end{aligned} \tag{2.16}$$

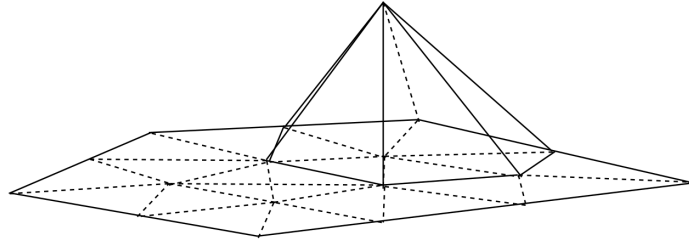


Figura 2.4: Esquema de las funciones φ_i empleadas para el caso de un dominio 2D.

Por lo tanto las incógnitas del problema discretizado espacialmente son $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathcal{V}_D \times \mathcal{U}_D$, tales que $(\mathbf{v})_i = V_i$ y $(\mathbf{u})_i = U_i$, donde los espacios \mathcal{V}_D y \mathcal{U}_D son:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_D &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_d} : \mathbf{v}|_{\Gamma_{sD}} = \bar{\mathbf{v}}_{sh}\}, \\ \mathcal{U}_D &= \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N_d} : \mathbf{u}|_{\Gamma_{sD}} = \bar{\mathbf{u}}_{sh}\},\end{aligned}\tag{2.17}$$

donde $\bar{\mathbf{v}}_{sh}$ y $\bar{\mathbf{u}}_{sh}$ son los coeficientes de las combinaciones lineales de las proyecciones de las condiciones de borde de velocidad y desplazamiento en el subespacio \mathcal{H} . A partir de esto, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas que puede resolverse con un método numérico apropiado. Para cada $t \in (0, T)$ hallar $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathcal{V}_D \times \mathcal{U}_D$ tales que:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f},\tag{2.18}$$

donde, si se denota con \mathfrak{T} a un elemento de la triangulación \mathcal{T} , las componentes de las matrices de masa y rigidez se calculan como:

$$(\mathbf{M})_{ij} = \sum_{\mathfrak{T} \in \mathcal{T}} \int_{\mathfrak{T}} \rho_s \boldsymbol{\eta}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_i d\mathbf{x}\tag{2.19}$$

$$(\mathbf{K})_{ij} = \sum_{\mathfrak{T} \in \mathcal{T}} \int_{\mathfrak{T}} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}_j) : \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}_i) d\mathbf{x}\tag{2.20}$$

$$(\mathbf{f})_i = \sum_{\mathfrak{T} \in \mathcal{T}} \int_{\mathfrak{T}} \left[(\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} - \boldsymbol{\psi} + \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{dt} \right] \cdot \boldsymbol{\eta}_i d\mathbf{x} + \int_{\mathfrak{T}} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}_i) : \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{v}_f, p_f) d\mathbf{x}\tag{2.21}$$

Se utiliza el método theta como método de avance temporal, obteniendo sendas ecuaciones para las velocidades y los desplazamientos:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{n+1} &= \mathbf{v}^n + \Delta t [\theta_2 \dot{\mathbf{v}}^{n+1} + (1 - \theta_2) \dot{\mathbf{v}}^n] \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \Delta t [\theta_1 \mathbf{v}^{n+1} + (1 - \theta_1) \mathbf{v}^n],\end{aligned}\tag{2.22}$$

donde se denota con el superíndice $n+1$ a la información en el paso de tiempo actual, y con n a la información en el paso de tiempo anterior. Cabe destacar que, en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema 2.22, se obtiene el método de Euler implícito usando $\theta = 1$, con $\theta = 0,5$ se obtiene el método de Crank-Nicolson (CN) y con $\theta = 0$ se obtiene el método de Euler explícito (EE). Combinando las ecuaciones 2.22 con la 2.18 se obtiene el sistema de ecuaciones que será resuelto para resolver el problema del sólido elástico. Este consiste en, para cada paso de tiempo $n+1$ hallar $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathcal{V}_D \times \mathcal{U}_D$

tales que:

$$[\mathbf{M} + \Delta t^2 \theta_2 \theta_1 \mathbf{K}] \mathbf{v}^{n+1} = [\mathbf{M} - \Delta t^2 \theta_2 (1 - \theta_1) \mathbf{K}] \mathbf{v}^n - \Delta t \mathbf{K} \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{f} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t [\theta_1 \mathbf{v}^{n+1} + (1 - \theta_1) \mathbf{v}^n] \quad (2.24)$$

De esta forma se debe resolver un sistema de ecuaciones de tamaño $(Nn_d) \times (Nn_d)$ y luego operaciones de suma vectorial para hallar los campos de desplazamientos y velocidades en el sólido.

La formulación matemática expuesta en este capítulo constituye la base del código desarrollado, que se explica en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Código Computacional

En este capítulo se explica brevemente el funcionamiento del código implementado, sobre la plataforma PARGPFEF para la resolución de problemas de sólidos elásticos inmersos.

3.1. Plataforma PARGPFEF

El nombre PARGPFEF proviene de las siglas en inglés para “PARallelized General Purpose Finite Element Program”. La misma está basada en la plataforma GPFEP, que surge ante la necesidad de investigadores y docentes en el ámbito del Método de Elementos Finitos de abordar con éxito problemas de la más variada índole. Esencialmente el objetivo de dicha plataforma es evitar la necesidad de reprogramar las rutinas referidas al manejo de información dentro del programa, la entrada y salida de datos, las rutinas de integración por cuadraturas de Gauss, etc. De esta forma, la plataforma GPFEP, permite que el programador se concentre casi exclusivamente en programar los algoritmos para ensamblar las matrices y vectores que conforman el sistema de ecuaciones del problema concreto que desea resolver, ya sea en el área de Mecánica del Sólido como de Fluidos, Electrostática, Transferencia de Calor, etc. Esto permite reducir considerablemente el tiempo que toma crear un nuevo programa de elementos finitos [13]. La plataforma GPFEP permite resolver mediante el método de los elementos finitos problemas de una, dos o tres dimensiones espaciales. Posee rutinas para utilizar distintos tipos de elementos y diferentes opciones de métodos iterativos. En caso de que el tiempo sea una variable, permite utilizar con relativa facilidad cualquier esquema de avance temporal. La plataforma PARGPFEF incorpora la utilización de rutinas de álgebra lineal paralelizada, mediante el uso de la biblioteca PETSc.

La plataforma PARGPFEF está compuesta por cinco programas. En este trabajo son utilizados dos: GPBOCO y GPMAIN. El programa de resolución en sí mismo es GPMAIN, mientras que GPBOCO preprocesa las condiciones de contorno de tipo Dirichlet. El postprocesamiento y visualización de los resultados se realiza utilizando Paraview [14] y otras rutinas generadas los lenguajes Python y C. Las mallas son generadas utilizando Gmsh [15] o algoritmos propios.

La plataforma PARGPFEF es ideal para resolver problemas monolíticos. Para el caso de interés en este trabajo, que es un problema multifísico particionado, debieron implementarse rutinas responsables de realizar el traspaso de información entre los problemas del fluido y el sólido, con el fin de modelar el acoplamiento entre ambos problemas. Se explicará el funcionamiento de las mismas en las secciones subsiguientes de este capítulo.

3.2. Código ImmALE

Al programa generado para resolver el problema multifísico se lo denominó immALE, por combinar aspectos de algoritmos para problemas de dominios inmersos con la formulación ALE. En la figura 3.1 se puede observar un esquema en el cual se explica la forma de operar del programa. Se tiene un parámetro de continuación, que en nuestro caso es el tiempo. El programa posee dos *loops* o lazos principales: el loop de continuación (iteraciones temporales) y, dentro de cada paso de tiempo, hay un loop de iteraciones de punto fijo usando Gauss-Seidel subrelajado para resolver el problema de FSI para ese paso de tiempo. Se denotará con la letra n a las iteraciones temporales, siendo $n + 1$ la iteración del paso de tiempo actual. Por otra parte, se denotarán con la letra k las iteraciones de FSI, siendo $k + 1$ la iteración actual. De esta forma, por ejemplo, las cantidades notadas con un superíndice k corresponden a cantidades de la iteración FSI anterior, mientras que las cantidades con un superíndice n corresponden a cantidades del paso de tiempo anterior.

El programa comienza realizando las inicializaciones de las variables, vectores y matrices utilizados. Se realiza la lectura de los datos del problema y las mallas del fluido y del sólido. Para realizar la paralelización, la malla del fluido se particiona. De esta forma se tendrá un conjunto de n_p procesos corriendo en paralelo, cada uno de los cuales posee una partición de la malla del fluido. Se prevé que el tamaño de la malla del sólido no represente un costo computacional tal que justifique su particionado, por lo que se entrega una copia completa de la misma a cada proceso. Luego se crea para cada malla la estructura de datos denominada árbol geométrico con el fin de acelerar

actual se calcula como $t^{n+1} = t^0 + (n + 1)\Delta t$. Luego se actualizan las condiciones de contorno en caso de que las mismas sean dependientes del tiempo. A continuación se efectúan los pasos fraccionados se detallan en los párrafos subsiguientes.

Reseteo y reajuste de la malla del fluido: En primer lugar, se chequea si se cumple la condición necesaria para resetear la malla. Esta condición puede ser: “si hay una distorsión inaceptable en los elementos”, o bien, como fue implementado en el presente trabajo: “si han transcurrido n_{rm} pasos de tiempo desde el último reseteo de malla”, siendo n_{rm} un entero fijado por el usuario antes de iniciar la corrida. Esta operación se realiza en el primer paso de tiempo y se repite, cada vez que se cumpla la condición prefijada, durante el cálculo. Cabe destacar que este paso se ve facilitado enormemente debido a que todas las mallas del fluido poseen la misma topología (se preservan el número de nodos y las conectividades de la malla). A continuación se detalla la forma en que se realiza.

- Se resetea la malla ajustada al contorno del sólido en el paso de tiempo anterior $\bar{\mathcal{T}}_f^n$. Esto es, se vuelve a la malla de referencia \mathcal{T}_f^0 , que no necesariamente está ajustada al contorno del sólido. Este paso es redundante en el primer paso de tiempo ($n + 1 = 1$) ya que $\mathcal{T}_f^n = \mathcal{T}_f^0$.
- Se ajusta la malla del fluido al contorno del sólido, siguiendo los siguientes pasos:
 - Para el dominio sólido $\Omega_s^{t_n}$, se calcula la función de nivel o “Level Set” $\phi_{f,0}^n$ en la malla de referencia \mathcal{T}_f^0 . El valor de dicha función en cada nodo de la malla del fluido es igual a la distancia entre ese nodo y el contorno del dominio del sólido. De esta forma, la curva de nivel dada por $\phi_{f,0}^n = 0$ representa el contorno del sólido, y los nodos donde $\phi_{f,0}^n < 0$ son nodos del fluido que están dentro del dominio del sólido $\Omega_s^{t_n}$.
 - Se construye el conjunto $\mathcal{N}_{f,0}^{\text{int},n}$ de nodos en la malla de referencia del fluido que están dentro del dominio del sólido y pertenecen a elementos que son atravesados por el contorno del sólido ($\partial\Omega_s^{t_n}$), dado por la curva de nivel $\phi_{f,0}^n = 0$. Luego se calculan los desplazamientos $\mathbf{d}_{f,0}^n$ necesarios para llevar esos nodos al contorno del sólido.
 - Finalmente se desplazan los nodos de la malla del fluido resolviendo un problema de Laplace en \mathcal{T}_f^0 con condición de borde de tipo Dirichlet igual a $\mathbf{d}_{f,0}^n$ para los nodos en $\mathcal{N}_{f,0}^{\text{int},n}$. La expresión matemática de este paso está resumida en la ecuación 3.1.

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_m = \mathbf{0} & \text{en } \mathcal{T}_f^0 \\ \mathbf{u}_m = \mathbf{d}_{f,0}^n & \text{en } \mathcal{N}_{f,0}^{\text{int},n} \end{cases} \quad (3.1)$$

En la práctica, la condición de borde de Dirichlet se implementa por penalización. Es decir, se multiplica el elemento diagonal de la fila de cada nodo con condición de borde Dirichlet en la matriz de rigidez del sistema por un factor de una escala significativamente mayor al resto de las magnitudes de la matriz. Luego se suma, a la fila correspondiente al nodo con condición de Dirichlet en el vector de términos independientes de la ecuación, el valor de la condición de Dirichlet multiplicado por el mismo factor de escala.

La nueva malla ajustada, generada al aplicar los desplazamientos obtenidos en el problema 3.1 a los nodos de la malla de referencia (\mathcal{T}_f^0), se denomina \mathcal{T}_f^n .

- (*) Se debe recalcular el campo de velocidades del fluido en la nueva malla ajustada \mathcal{T}_f^n , a partir los valores de dicho campo incógnita en los nodos de la antigua malla ajustada $\bar{\mathcal{T}}_f^n$. Esto se hace buscando, para cada nodo N_i de la nueva malla \mathcal{T}_f^n , dentro de qué elemento \bar{e}_i de la antigua malla $\bar{\mathcal{T}}_f^n$ se encuentra. Luego se obtiene la velocidad en cada nodo N_i interpolando linealmente las velocidades en los nodos de \bar{e}_i .
- Para el dominio del sólido $\Omega_s^{t_n}$ se computa la función de nivel ϕ_f^n en la nueva malla \mathcal{T}_f^n . Esta función se utilizará como indicador de la posición del sólido y no se vuelve a recalcular hasta que no se vuelve a hacer el reseteo de la malla.

Comienzo de las iteraciones FSI: Se asignan los valores de los campos incógnita en el paso de tiempo anterior como semilla para las iteraciones FSI de este paso de tiempo: $(\cdot)^k = (\cdot)^n$. Se procede a comenzar las iteraciones FSI.

Cálculo de la velocidad ALE de la malla del fluido: Se utiliza la formulación ALE para asegurarse de que los nodos del fluido ficticio se desplacen solidarios al sólido. Para ello se calcula la velocidad de los nodos en la malla del fluido como se detalla a continuación

- Se crea el conjunto \mathcal{N}_f^k de nodos del fluido en la región del sólido $\Omega_s^{t_{n+1},k}$ para calcular la nueva función “Level Set” (esto no es necesario en la primer iteración). Realizando el mismo proceso de interpolación lineal utilizado para recalculer las velocidades del fluido en (*), se hallan las velocidades de los nodos en el fluido ficticio (los nodos del conjunto \mathcal{N}_f^k) extrayéndola de la malla del sólido $\mathcal{T}_s^{n+1,k}$, es decir: $\mathbf{v}_{s,j}^k = \mathbf{v}_s^k(\mathbf{x}_j), \forall j \in \mathcal{N}_f^k$.
- Las velocidades $\mathbf{v}_{s,j}^k$ halladas en el paso anterior son utilizadas como condición de Dirichlet (que nuevamente se implementa en la práctica mediante

el proceso de penalización) en el problema de Laplace que se observa en 3.2, cuyo fin es obtener el nuevo campo de velocidades ALE de la malla del fluido.

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{v}_m^{k+1} = \mathbf{0} & \text{en } \mathcal{T}_f^n \\ \mathbf{v}_{m,j}^{k+1} = \mathbf{v}_{s,j}^k & \forall j \in \mathcal{N}_f^k \end{cases} \quad (3.2)$$

Resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes: A continuación se resuelve el problema fluidodinámico: la formulación immALE de las ecuaciones de Navier-Stokes presentadas en 2.7. Debido a que utilizamos una formulación ALE, las coordenadas de los nodos de la malla del fluido varían en cada iteración y por lo tanto se deben calcular las derivadas materiales teniendo en cuenta el término convectivo y la velocidad relativa entre el fluido y la malla:

$$\frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_m) \quad (3.3)$$

La restricción en el campo de velocidades distribuida sobre todo el dominio del sólido $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s$ en Ω_s^t es impuesta mediante multiplicadores de Lagrange. En el contexto del método de los elementos finitos, esta restricción es impuesta nodo a nodo (en vez de ser integrada en cada elemento como, por ejemplo, en el caso de la condición de borde tipo Neumann). Luego, los multiplicadores de Lagrange son cantidades nodales. Por lo tanto en los problemas 2.7 y 2.13 se reemplazan las integrales sobre Ω_s^t por sumatorias sobre nodos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\psi} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\mathbf{x} &\rightarrow \sum_{j \in \mathcal{N}_f^k} \boldsymbol{\psi}_j \cdot \hat{\mathbf{v}}_f(\mathbf{x}_j) = \sum_{j \in \mathcal{N}_f^k} \boldsymbol{\psi}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_i(\mathbf{x}_j) = \sum_{j \in \mathcal{N}_f^k} \boldsymbol{\psi}_j \cdot \mathbf{e}_k \\ \int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\psi} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s d\mathbf{x} &\rightarrow \sum_{j \in \mathcal{N}_s^k} \boldsymbol{\psi}_j \cdot \hat{\mathbf{v}}_s(\mathbf{x}_j) = \sum_{j \in \mathcal{N}_s^k} \boldsymbol{\psi}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_i(\mathbf{x}_j) = \sum_{j \in \mathcal{N}_s^k} \boldsymbol{\psi}_j \cdot \mathbf{e}_k, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Donde $k = 1, \dots, n_d$ y \mathbf{e}_k es el versor de dirección k y \mathcal{N}_s^k es el conjunto de nodos de la malla del sólido. Notar que ahora $\boldsymbol{\psi}_j$ es una cantidad (un vector) definida en cada nodo. Una vez resueltas las ecuaciones de Navier-Stokes se obtienen los campos incógnita para la iteración actual $(\mathbf{v}_f^{k+1}, p_f^{k+1}, \boldsymbol{\psi}^{k+1})$.

Pasaje de los datos del problema del fluido al sólido: Una vez que se ha resuelto el problema del fluido, se debe hacer un pasaje de ciertos términos de la ecuación del fluido para ser integrados en la ecuación del sólido y ensamblar el segundo miembro de la ecuación 2.18, como se ve en 2.21.

Esto se realiza nodo a nodo, es decir, se integran las cantidades provenientes del fluido en la misma malla del fluido (en vez de la del sólido), luego se suman las contribuciones de cada término (correspondientes a cada nodo de la malla del sólido) al segundo miembro del sólido. Por lo tanto, el segundo miembro de la ecuación 2.18 quedará calculado de la siguiente manera:

$$(\mathbf{f})_i = \sum_{\mathfrak{T} \in \mathcal{T}_s^k} \int_{\mathfrak{T}} \rho_s \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta}_i d\mathbf{x} + \sum_{\mathfrak{T} \in \mathcal{T}_f^k} \int_{\mathfrak{T}} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \rho_f \mathbf{g} \right] \cdot \boldsymbol{\eta}_i d\mathbf{x} - \sum_{j \in \mathcal{N}_f^k} \boldsymbol{\psi}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_i(\mathbf{x}_j) \quad (3.5)$$

Notar que a esta altura de la iteración FSI sólo se habrán sumado el segundo y tercer término de la ecuación 3.5 a \mathbf{f} , ya que el primero (el término de fuerzas volumétricas del sólido) será ensamblado en el siguiente paso fraccionado, junto con la matriz de rigidez y de masa del sólido.

Resolución de las ecuaciones de Navier-Lamé: Una vez traspasados los datos necesarios al vector de términos independientes de la ecuación 2.18, se procede a resolver el problema de elastodinámica. El mismo se resuelve en dos pasos fraccionados. En el primero se resuelve el sistema de ecuaciones dado en 2.23. Y en el segundo se resuelve la ecuación vectorial 2.24. De esta forma se obtienen las velocidades \mathbf{v}_s^{k+1} y los desplazamientos \mathbf{u}_s^{k+1} , respectivamente, en la iteración FSI actual.

A esta altura, adicionando los desplazamientos obtenidos a las coordenadas de los nodos en la malla $\mathcal{T}_s^{n+1,k}$ (que representa al dominio del sólido $\Omega_s^{n+1,k+1}$ de la iteración FSI anterior), ya se podría obtener la malla desplazada del sólido $\mathcal{T}_s^{n+1,k+1}$, que representa el nuevo dominio del sólido $\Omega_s^{n+1,k+1}$. Pero este paso se pospone ya que se necesita la malla del sólido no desplazada $\mathcal{T}_s^{n+1,k}$ en el paso siguiente.

Desplazamiento de los nodos de la malla del fluido: De la misma forma que se realiza en (*), se extraen los desplazamientos de los nodos de la malla del sólido ($\mathcal{T}_s^{n+1,k}$) y, mediante interpolación lineal se hallan los desplazamientos de los nodos del fluido ficticio en \mathcal{N}_f^k haciendo $\mathbf{u}_{s,j}^k = \mathbf{u}_s^k(\mathbf{x}_j), \forall j \in \mathcal{N}_f^k$. Nuevamente se resuelve la ecuación de Laplace usando las velocidades $\mathbf{u}_{s,j}^k$ como condición de Dirichlet implementada por penalización, para hallar los desplazamientos en la malla del fluido $\mathcal{T}_f^{n+1,k}$.

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_m^{k+1} = \mathbf{0} & \text{en } \mathcal{T}_f^{n+1,k} \\ \mathbf{u}_{m,j}^{k+1} = \mathbf{u}_{s,j}^k & \forall j \in \mathcal{N}_f^k \end{cases} \quad (3.6)$$

Una vez hallados los desplazamientos de la malla del fluido, los mismos se adicionan a las coordenadas de los nodos de la malla del fluido $\mathcal{T}_f^{n+1,k}$ para obtener la nueva malla del fluido $\mathcal{T}_f^{n+1,k+1}$. Se realiza el mismo procedimiento con los desplazamientos en la malla del sólido para obtener la nueva malla del sólido $\mathcal{T}_s^{n+1,k+1}$.

Análisis de la calidad de la malla: Se analiza la calidad de los elementos de la nueva malla deformada en busca de elementos que se hayan deformado más de lo admisible. En la versión actual del código se procede a remallar en el paso de tiempo siguiente. Sin embargo, está previsto que en futuras implementaciones del código se realice el remallado y se repitan las iteraciones FSI del paso de tiempo actual.

Chequeo de convergencia: Finalmente, se evalúa si la solución está convergida. En la versión actual del código, se establecen los criterios de convergencia sobre la norma de los desplazamientos del sólido. Se utilizan dos criterios basados en estimaciones del error absoluto o el error relativo:

$$\begin{aligned}\epsilon_{abs} &= \|\mathbf{u}_s^{k+1} - \mathbf{u}_s^k\| \\ \epsilon_{rel} &= \frac{\|\mathbf{u}_s^{k+1} - \mathbf{u}_s^k\|}{\|\mathbf{u}_s^1 - \mathbf{u}_s^0\|}\end{aligned}\tag{3.7}$$

Se considera que la solución ha convergido si $\{\epsilon_{abs} \leq \text{tol}_{abs} \vee \epsilon_{rel} \leq \text{tol}_{rel}\}$, donde tol_{abs} y tol_{rel} son tolerancias fijadas de antemano por el usuario.

En caso de que haya alcanzado la condición de convergencia, se actualizan los valores de las incógnitas en el paso de tiempo actual $(\cdot)^{n+1} = (\cdot)^{k+1}$. Luego se imprimen las soluciones correspondientes a dicho paso de tiempo, se traspasan los valores del paso del tiempo actual a los valores del paso de tiempo anterior y a los valores de la semilla para las iteraciones FSI $(\cdot)^k = (\cdot)^n = (\cdot)^{n+1}$. Tras esto, se pasa a la siguiente iteración temporal. En caso contrario, se calcula un parámetro de relajación apropiado ω^k , se calcula una nueva semilla para las iteraciones FSI mediante $(\cdot)^k = \omega^k(\cdot)^{k+1} + (1 - \omega^k)(\cdot)^k$ y se comienza una nueva iteración FSI.

Se mencionó dentro de la descripción de los pasos fraccionados la necesidad de resolver sistemas lineales de ecuaciones. Con este fin, el algoritmo de resolución empleado en la mayoría de los casos es una combinación del método iterativo de subespacios de Krylov con un preconditionador o un algoritmo de resolución directo secuencial. Las rutinas asociadas al mismo son las rutinas KSP de la biblioteca PETSc.

En el próximo capítulo se realizará una validación del código implementado. Se dedicará particular atención a las nuevas rutinas implementadas para la comunicación entre el problema del fluido y el del sólido, además del algoritmo de resolución de las ecuaciones de elasticidad lineal implementado.

Capítulo 4

Validación

En este capítulo se realiza una validación del código desarrollado. Se resuelven problemas cuya solución es conocida, para poder contrastar la solución numérica obtenida con la solución de referencia.

4.1. Estrategia de Validación

Para la implementación del presente código computacional se tomó como punto de partida una versión previa del mismo, también desarrollada sobre la plataforma PARGPFEP, que es capaz de resolver problemas de sólidos rígidos inmersos en fluidos incompresibles. Una validación de dicho código fue realizada por Gadur, S. N. et al. en [12]. Como primer paso hacia el objetivo del presente trabajo, se desarrolló un módulo capaz de resolver problemas de elasticidad lineal. Se presenta una validación del mismo en la sección 4.2. En ésta se compara la solución numérica obtenida usando el código, con la solución analítica de la deflexión máxima en una viga simplemente empotrada con una carga concentrada en su extremo libre.

Luego se procedió a realizar la integración del módulo de elasticidad lineal desarrollado al código immALE. Este paso requirió, entre otras cosas, modificar las rutinas existentes asociadas al traspaso de datos del problema del fluido al problema del sólido, e implementar nuevas. Para validar el programa resultante, se modeló en primer lugar un problema bidimensional sencillo en el cual un sólido elástico se encuentra inmerso en un fluido cuya densidad es la misma que la del sólido. El conjunto se encuentra confinado en un canal con condición de deslizamiento en sus paredes laterales. Al aplicarse una diferencia de presión entre los dos extremos del conducto, se espera que tanto el

sólido como el fluido se muevan en conjunto como un sólido rígido. A este tipo de flujo se lo denomina flujo pistón. Se presenta en la sección 4.3 la validación realizada usando esta configuración. La misma permite verificar el correcto funcionamiento de las nuevas rutinas de traspaso de datos desde el problema del fluido al del sólido.

Finalmente, se procedió a resolver un problema en el cual se exploten todas las potencialidades del código immALE. En la validación expuesta en la sección 4.4 se simula el flujo a través de un canal parcialmente obstruido por un cilindro elástico. Se realizaron simulaciones para distintos números de Reynolds, a saber $Re = 20$ y $Re = 150$. En ambos casos se observaron comportamientos fluidodinámicos adecuados, tomando como referencia los resultados analizados en el trabajo de Williamson, C. H. K. [17]. En particular, para el caso de $Re = 150$ se comparó la frecuencia de desprendimiento de vórtices de Von Kármán con una fórmula empírica [5]. En todos los casos se contrastó la deflexión de la viga en la dirección del flujo con una estimación analítica expuesta en el Apéndice B. Para concluir, se evaluó la respuesta del sistema cuando la frecuencia de desprendimiento de vórtices es igual a la frecuencia de resonancia del cilindro. Para este último caso se observó el comportamiento resonante esperado, caracterizado por un aumento en la amplitud de las oscilaciones en la dirección del campo excitador.

Las simulaciones expuestas en las secciones 4.2 y 4.3 de este capítulo fueron realizadas en una computadora con un procesador Core-i7 4930K con 6 Núcleos, una velocidad de 3.4GHz y 64 GB de memoria RAM. Los tiempos de simulación de las mismas van del orden del minuto hasta algunas horas. Las simulaciones de la sección 4.4 fueron realizadas en el cluster del departamento de Mecánica Computacional del Centro Atómico Bariloche. El mismo consta de 20 nodos rackeables con dos procesadores por nodo. El servidor principal cuenta con procesadores Xeon E5 2670 v3 de 12 núcleos, 32GB de memoria RAM y una velocidad de 2,3GHz; mientras que cada uno de los 20 nodos tiene procesadores Xeon E5 2660 v3 de 10 núcleos, 32GB de memoria RAM y una velocidad de 2,6GHz. La duración de simulación de estos casos mas complejos varía desde dos días hasta dos semanas utilizando un nodo del cluster.

4.2. Deflexión de una Viga en Voladizo

4.2.1. Descripción del problema

Previamente, se han realizado validaciones del código para resolver problemas de sólidos rígidos inmersos en un flujo incompresible [12]. Por esto, se procedió a realizar la validación del módulo del programa encargado de resolver el problema de elasticidad

lineal.

En primera instancia se modeló el problema tridimensional de una viga en voladizo trabajando en flexión, con un extremo empotrado y una carga concentrada en el otro extremo, como se observa en la figura 4.1. Para simular la carga aplicada en la punta se utilizó una tensión de corte uniforme sobre la cara correspondiente al extremo de la viga.

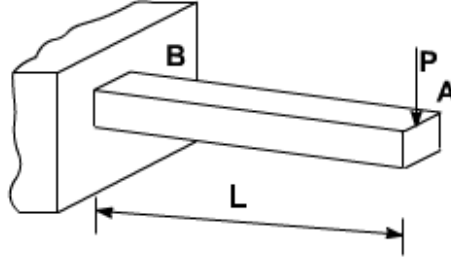


Figura 4.1: Esquema del problema de una viga en voladizo con carga puntual en su extremo libre.

Se utilizó una malla no estructurada de elementos tetrahédricos en el dominio de la viga que se muestra en la figura 4.2.

Se comparó la deflexión máxima calculada mediante el código propuesto con el resultado analítico provisto por la teoría de Euler-Bernoulli para vigas unidimensionales. Según ésta, la deflexión máxima en una viga en voladizo de sección transversal constante con una carga puntual en su extremo viene dada por la ecuación 4.1

$$\delta_{max} = \frac{PL^3}{3EI} \quad (4.1)$$

Donde P es la carga puntual en el extremo libre de la viga, L es la longitud de la misma, E es el módulo de Young del material que la compone e I es el momento de inercia de su sección transversal respecto al plano neutro.

Se modela la carga aplicada sobre el extremo libre eligiendo una tensión de corte f de magnitud tal que la integral de la tensión en la superficie de la punta de la viga sea igual a la fuerza puntual necesaria para que el desplazamiento máximo sea de 0,001, esto es:

$$f = \frac{P}{A} = 0,003 \frac{EI}{AL^3} \quad (4.2)$$

A partir del razonamiento anterior, los parámetros materiales utilizados para la

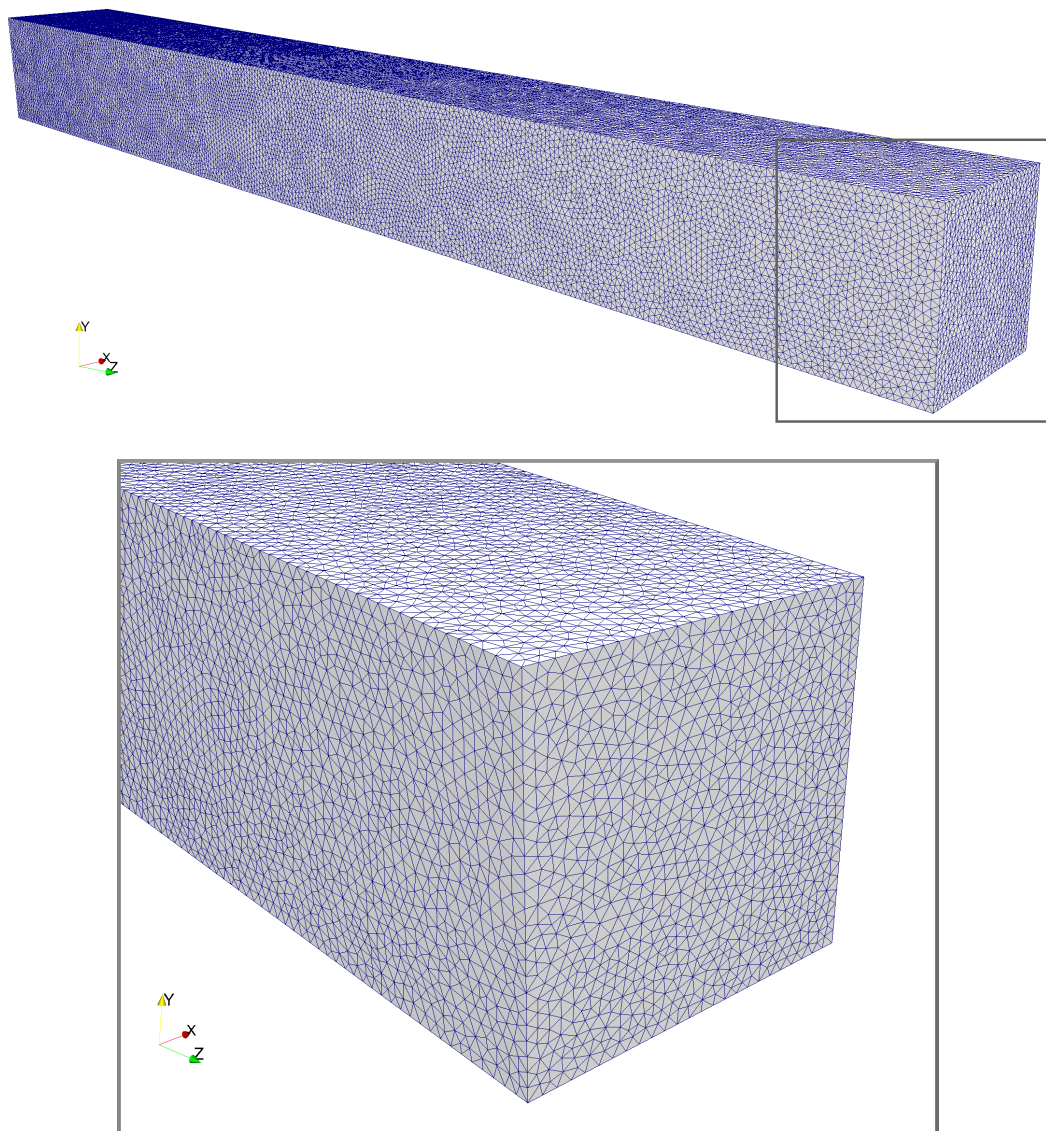


Figura 4.2: Esquema y orientación respecto al eje de coordenadas de la malla utilizada en el problema de la viga en voladizo.

simulación son los que se observan en la tabla 4.1

4.2.2. Resultados

Se obtuvo la solución numérica en el estado estacionario para dos mallas diferentes con distinto número de elementos. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.2.

El error porcentual en la tabla se calcula tomando como valor de referencia la solución analítica obtenida mediante la ecuación 4.1. Se puede ver que la solución numérica converge a la solución analítica al disminuir el tamaño de los elementos.

Nombre	Símbolo	Magnitud	Unidades
Largo de la viga	L	0.1	m
Espesor de la viga	a	0.01	m
Ancho de la viga	b	0.01	m
Módulo de Young	E	7.00e+10	Pa
Módulo de Poisson	ν	0.3	m
Tensión en el extremo libre	f	1750000	m

Tabla 4.1: Parámetros de la simulación considerados para la resolución del problema de una viga en voladizo.

Elementos en el espesor	Número de elementos	Solución numérica	Solución analítica	Error porcentual
25	600000	$9,94e-4$	0.001	0.7 %
40	2400000	$9,97e-4$	0.001	0.4 %

Tabla 4.2: Desplazamientos máximos calculados para la viga en voladizo estudiada.

Se puede observar la viga deformada (usando un factor de amplificación de 10 en las deformaciones) en la figura 4.3

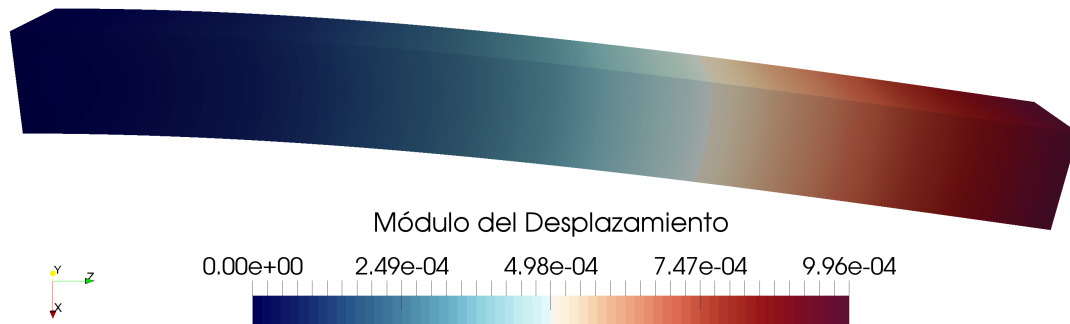


Figura 4.3: Vista de la viga deformada (con un factor de amplificación 10) y el módulo del desplazamiento de la viga en voladizo estudiada, hallada mediante el código computacional.

4.3. Flujo alrededor de un obstáculo prismático

4.3.1. Descripción del problema

Con el objeto de realizar una validación de las rutinas de traspaso de información del problema del fluido al problema del sólido, se modela el flujo bidimensional alrededor de un obstáculo sólido de sección rectangular, cuya densidad es igual a la densidad del fluido circundante, como se observa en la figura 4.4. El flujo puede deslizar pero

no atravesar las fronteras superior e inferior del dominio estudiado, y tiene una condición de no deslizamiento sobre el contorno del obstáculo sólido. Las velocidades del flujo son puramente horizontales a la entrada y a la salida del canal. Se aplica una presión negativa en el extremo derecho (salida) del canal y una presión nula a la entrada (extremo izquierdo). Considerando estas condiciones de borde, el problema podría pensarse como el flujo de un fluido a través de un arreglo infinito de obstáculos sólidos con periodicidad en el eje vertical. Usando el método de las imágenes se puede modelar uno solo de los obstáculos de esta manera. Por simplicidad se desprecian las fuerzas gravitatorias.

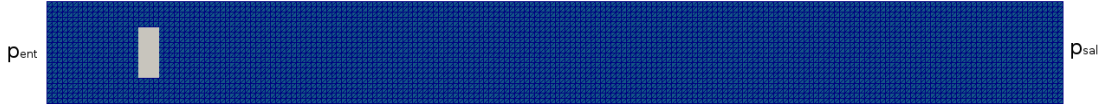


Figura 4.4: Configuración utilizada para el problema de validación.



Figura 4.5: Configuración geométrica utilizada en la simulación del flujo alrededor de un obstáculo prismático.

Siendo que el fluido y el sólido tienen la misma densidad, la solución de este problema es tal que todo el conjunto fluido-sólido se mueve hacia la derecha con una aceleración constante, impuesta por la diferencia entre las presiones fijadas a la entrada y salida del canal. Tomando una aproximación unidimensional del problema (todas las cantidades son uniformes a lo largo de la sección perpendicular al eje horizontal) se puede estimar esta aceleración como:

$$\frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} = \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} = -\frac{(p_{ent} - p_{sal})}{\rho L} \quad (4.3)$$

Donde p_{sal} y p_{ent} son las presiones de salida y de entrada respectivamente; ρ es la densidad del fluido, igual a la del sólido, y L la longitud del canal. Se simuló el problema mencionado utilizando los siguientes parámetros: $L = 10$, $H = 1$, $t = 0,202$,

$D = 0,5$, $p_{ent} = 0$, $p_{sal} = -10$, donde las magnitudes geométricas L , H y D son las que se observan en la figura 4.5.

4.3.2. Resultados

Se obtuvo la velocidad del centro de masa del cuerpo sólido en función del tiempo. El resultado se muestra en la figura 4.6. Realizando un ajuste lineal de los puntos calculados se puede hallar la aceleración del centro de masa del sólido en la solución numérica. La misma se compara con la aceleración de la solución analítica calculada en 4.3.

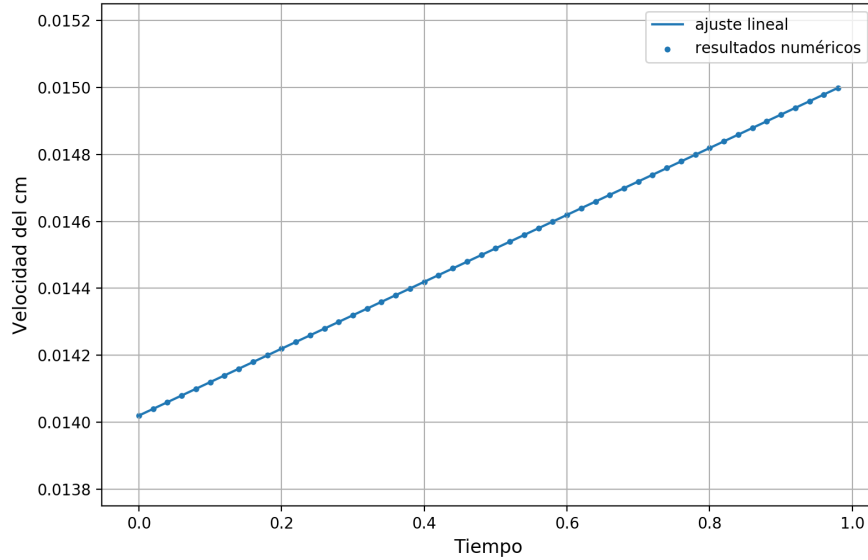


Figura 4.6: Velocidad en la dirección \hat{x} del centro de masa del sólido en función del tiempo.

La pendiente y ordenada al origen obtenidas del ajuste lineal son $m = 0,000999$ y $b = 0,014$. La pendiente del ajuste nos da una aproximación de la aceleración del centro de masa del sólido, la cual se espera que sea igual a 0.001 siguiendo el cálculo de 4.3. Por lo tanto el error relativo global en la aceleración del centro de masa es inferior al 0.2 %.

Se observa en la figura 4.7 (a) el campo de presiones calculado numéricamente y en 4.7 (b) el resultado de la malla deformada (con un factor de amplificación de 1000 en las deformaciones) para tiempo $t = 1,0$.

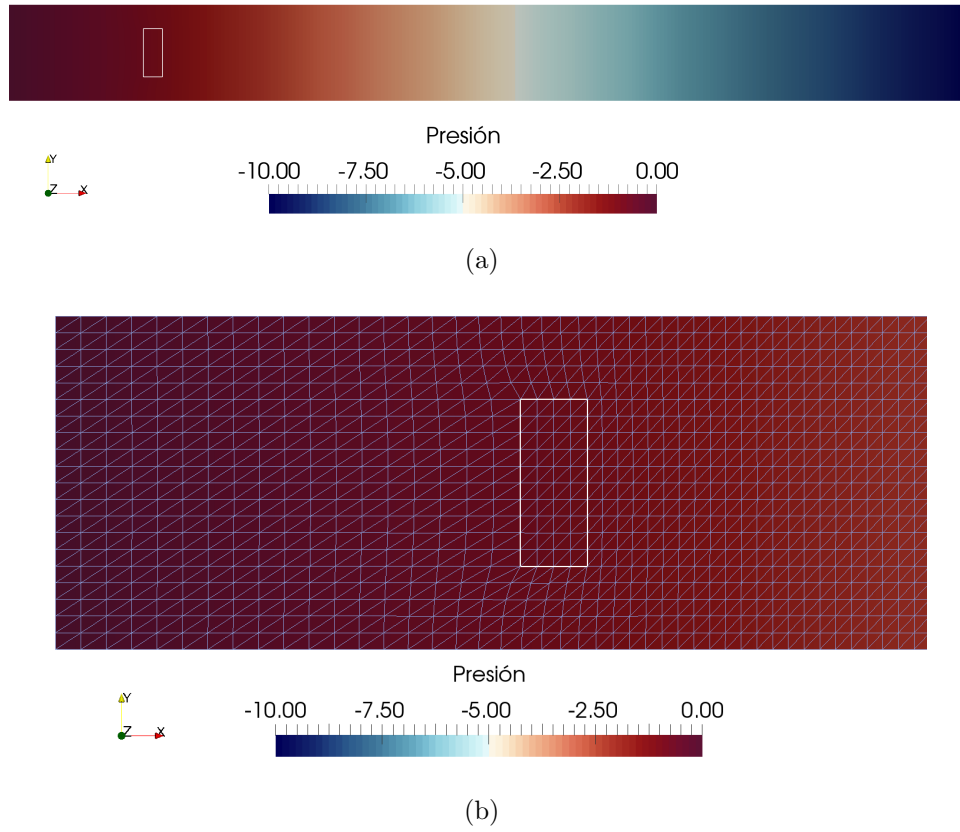


Figura 4.7: Presiones (a) y vista de la malla del fluido deformada para tiempo $t=0.99$ (factor de amplificación de las deformaciones de 1000) (b).

4.4. Flujo alrededor de un cilindro elástico

4.4.1. Descripción del problema

Se simuló el problema esquematizado en la figura 4.8, en la que un fluido se desplaza alrededor de un obstáculo cilíndrico a través de un canal. El dominio del fluido es de forma prismática. Utilizaremos las letras a , b y c para referirnos a las dimensiones del mismo en el eje x , y y z respectivamente. El dominio del sólido está totalmente inmerso en el dominio del fluido. El mismo consiste en un cilindro de altura h y diámetro D , cuyo eje longitudinal está ubicado en dirección vertical y es equidistante a las caras anterior, posterior e izquierda del dominio del fluido. Los valores de los parámetros geométricos utilizados en los cálculos pueden observarse en la tabla 4.3. Los mismos parámetros geométricos fueron utilizados en todos los casos mencionados en esta sección.

El fluido ingresa al dominio por la cara izquierda con velocidad V_∞ (con dirección normal a ésta) y sale de la misma por la cara derecha (también con velocidad normal a la cara). A las caras superior, inferior, anterior y posterior del dominio del fluido se les asignó una condición de no penetración, es decir que el fluido puede tener velocidades

en el plano definido por la cara pero no puede haber componentes de la velocidad en la dirección normal a la misma. También se aplican condiciones de contorno sobre los campos de velocidad y desplazamiento de la malla del fluido. La malla de fluido está fija (velocidad y desplazamiento de la malla nulos) en todas las caras salvo la cara superior, en la cual solo se restringen los desplazamientos y velocidades de la malla en la dirección normal al plano definido por la cara. En cuanto al cilindro, ha sido impuesta una condición de empotramiento (velocidad y desplazamiento nulos) en su cara inferior.

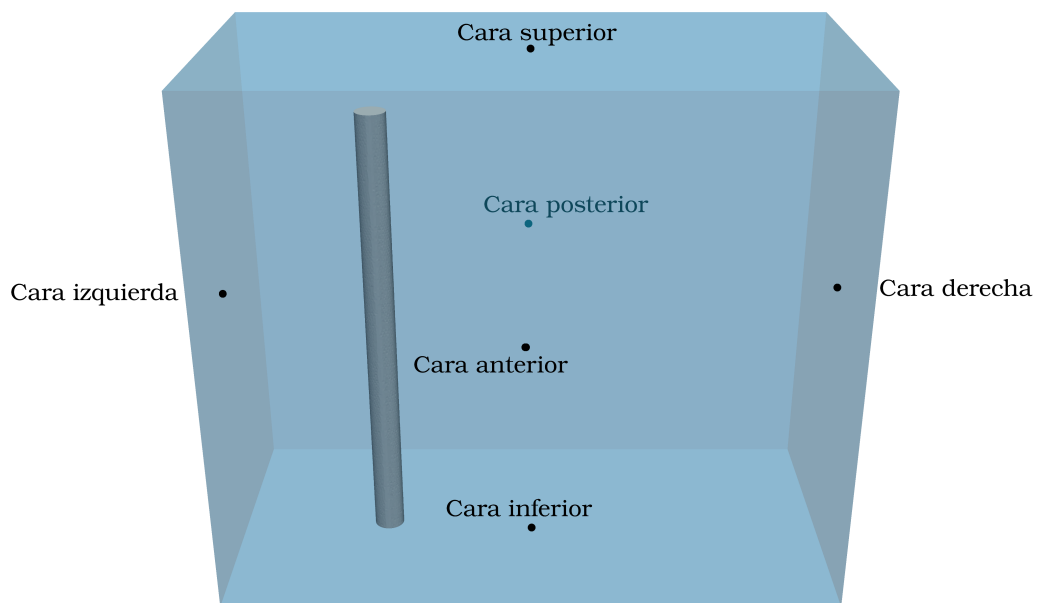


Figura 4.8: Configuración utilizada para el problema de validación.

Nombre [Unidades]	Símbolo	Magnitud
Diámetro del cilindro [m]	D	1,01
Altura del cilindro [m]	h	15
Largo del canal [m]	a	20
Ancho del canal [m]	b	10
Altura del canal [m]	c	17
Distancia entre la entrada y el centro del cilindro [m]	l	5

Tabla 4.3: Parámetros geométricos del canal y la obstrucción.

Se ha determinado experimentalmente que el comportamiento que se observa en problemas de este tipo varía considerablemente en función del número de Reynolds. Éste es una medida de la razón entre las fuerzas debidas a la viscosidad y las fuerzas inerciales. El mismo se calcula como se observa en la ecuación 4.4.

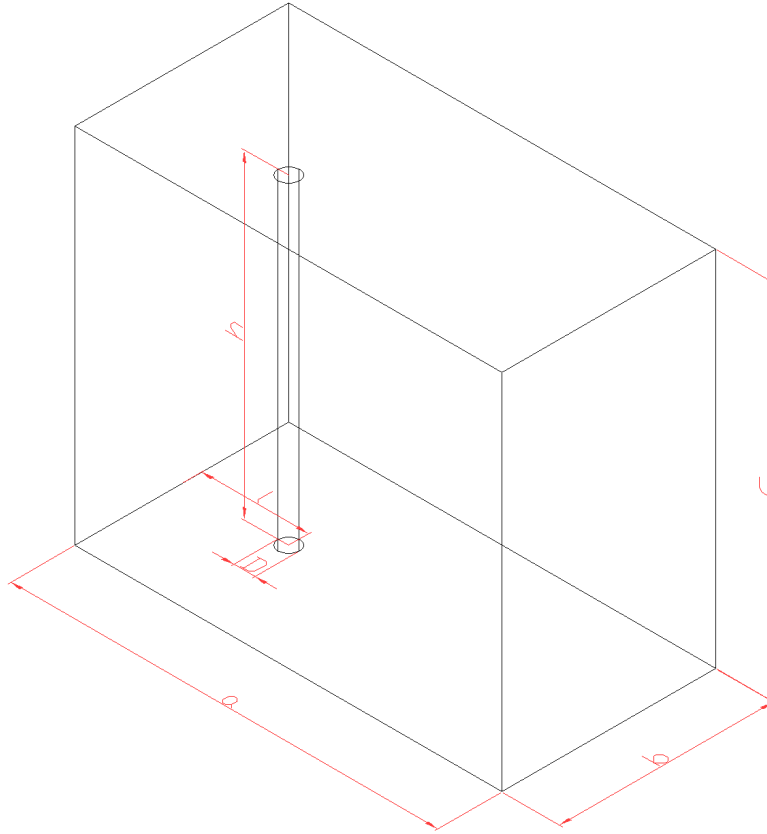


Figura 4.9: Configuración geométrica utilizada para el problema de validación.

$$Re_D = \frac{\rho_f V_\infty D}{\mu_f}, \quad (4.4)$$

donde ρ_f y μ_f son la densidad y viscosidad dinámica del fluido, respectivamente, V_∞ es la velocidad de entrada al canal y D es el diámetro del cilindro. En los casos estudiados en el presente trabajo, se utilizan $\rho_f = 1000$ y $\mu_f = 1,0$, y se varía la velocidad de entrada V_∞ para seleccionar el número de Reynolds que se desea simular.

Los distintos comportamientos observados experimentalmente se esquematizan en la figura 4.10. Para números de Reynolds inferiores a 5, se tiene un régimen laminar de corriente no desprendida. Para Reynolds entre 5 y 40, se observa el desprendimiento de una estela formada por dos torbellinos simétricos. Entre Reynolds 40 y 300 se observa el fenómeno que se conoce como calle de vórtices de Von Kármán, de particular interés en este trabajo. En esta configuración, se produce una separación inestable del flujo al pasar tras el obstáculo sólido, lo cual genera un desprendimiento de vórtices alternados como se observa en las figuras 4.10 y 4.11. La frecuencia de desprendimiento de pares de vórtices depende del número de Reynolds, así como puede observarse en la figura 4.12. Para estudiarla se define el número adimensional de Strouhal, que relaciona esta frecuencia con la frecuencia característica a la que una partícula con velocidad V_∞

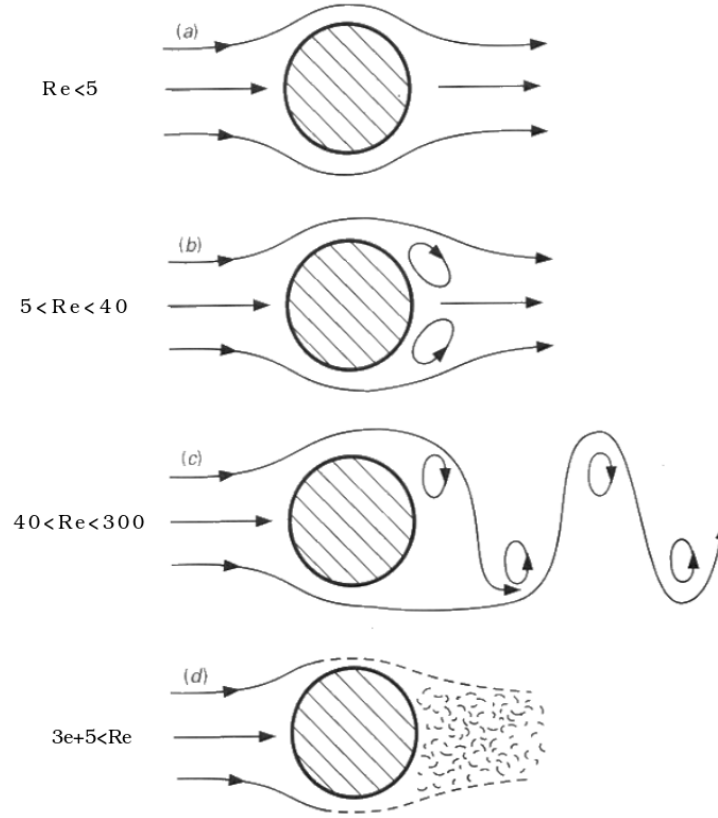


Figura 4.10: Comportamiento del flujo en función del número de Reynolds. Imagen tomada del trabajo de White, F. M. [5].

se desplaza una distancia equivalente al diámetro del cilindro, como se observa en la ecuación 4.5.

$$St_D = \frac{fD}{V_\infty}. \quad (4.5)$$

Para números de Reynolds entre 40 y 150, la dependencia del número de Strouhal con el número de Reynolds puede ser calculada utilizando la correlación empírica [5] dada por la ecuación 4.6.

$$St_D = 0,198 \left(1 - \frac{19,7}{Re_D} \right). \quad (4.6)$$

Para valores mayores del número de Reynolds la estela de vórtices se vuelve turbulenta, aunque persiste el desprendimiento periódico de vórtices, variando el punto de desprendimiento de la capa límite según ésta sea laminar o turbulenta. Se considera que el régimen es totalmente turbulento al alcanzar Reynolds mayores a $3 \cdot 10^5$.



Figura 4.11: Calle de vórtices de Von Kármán generada por el flujo alrededor de un obstáculo sólido. [Fotografía de Jürguen Wagner] (2014).

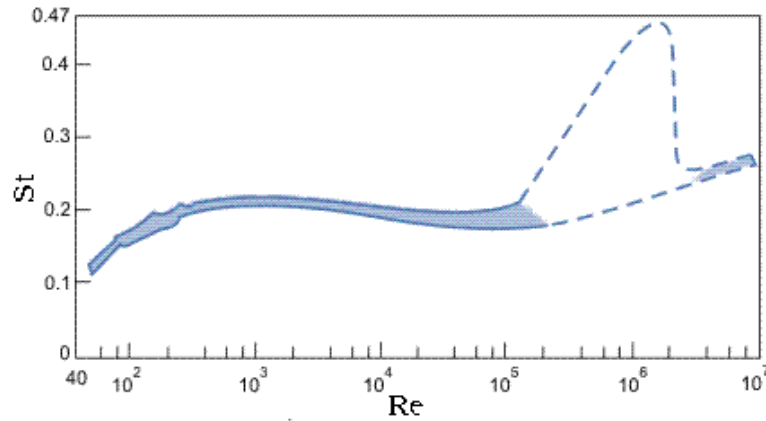


Figura 4.12: Resultados experimentales de medición del Número de Strouhal en función del número de Reynolds para cilindros esbeltos verticales inmersos en un flujo horizontal. Imagen adaptada del trabajo de Tehen A. H. [6]

En el presente trabajo se realizan simulaciones para Reynolds de 20 y 150. Para los casos con $Re = 150$ la frecuencia de desprendimiento de vórtices predicha por la ecuación 4.6 es de $f_{ref} = 0,0256$. Se pueden observar los parámetros fluidodinámicos empleados en la tabla 4.4. En todos los casos, se seleccionó una densidad del fluido ficticio igual a la densidad del sólido.

Como consecuencia de la generación de vórtices se genera un campo de presiones alternante en la vecindad del obstáculo sólido. Como consecuencia de este campo excitador, el cilindro se desplaza oscilatoriamente en el eje y . Se cumple un ciclo de oscilación en dicho campo de presiones por cada par de vórtices que se desprenden del cilindro, por lo tanto la frecuencia de oscilación será igual a la frecuencia de desprendimiento de vórtices. La frecuencia f_{ref} en la ecuación 4.6 ya tiene esto en cuenta, ya que se trata de la frecuencia de desprendimiento de pares de vórtices. En caso de que la frecuencia de generación de vórtices coincida con alguna de las frecuencias de resonancia del sólido (particularmente la frecuencia fundamental), se producirá un fenómeno conocido como

resonancia. En tal caso, la energía absorbida por el sólido elástico alcanza un máximo, lo cual resulta en un incremento notable de la amplitud de las oscilaciones del cilindro en el eje y . El incremento en la amplitud no es indefinido debido al efecto disipativo del fluido viscoso. Las frecuencias de resonancia de una viga con un extremo libre y un extremo empotrado se calculan en el apéndice A.

La frecuencia de resonancia para el modo fundamental de una viga empotrada con un extremo libre se estima mediante la ecuación 4.7.

$$2\pi f^* = \sqrt{\frac{EI}{\rho_s A_t}} \left(\frac{\mathbb{C}_1}{L} \right)^2. \quad (4.7)$$

En ésta, E es el módulo de Young o módulo de elasticidad del material, I es el segundo momento de área respecto al eje y , ρ_s es la densidad del sólido, A_t es el área de la sección transversal del sólido (que es constante en toda la longitud del obstáculo), L es el largo de la viga y \mathbb{C}_0 es una constante que se calcula como la primera raíz mayor que cero de la ecuación:

$$1 + \cosh(\mathbb{C}) \cos(\mathbb{C}) = 0. \quad (4.8)$$

En este caso $\mathbb{C}_0 \approx 1,8751$. El área y el segundo momento de inercia son parámetros derivados del diámetro de cilindro elegido: $A = \pi(D/2)^2 = 0,7854$ y $I = \pi(D/2)^4/4 = 0,0491$. Luego, si definimos $\phi = E/\rho_s$, entonces ϕ_{res} es el cociente necesario para que la frecuencia de excitación sea igual a la frecuencia del modo fundamental de flexión del cilindro, y está dada por la ecuación 4.9.

$$\phi_{res} = \frac{E}{\rho_s} = (2\pi f_{exc})^2 \frac{A_t}{I} \left(\frac{L}{\mathbb{C}_0} \right)^4. \quad (4.9)$$

En ésta, f_{exc} es la frecuencia de excitación, que en el caso estudiado es la frecuencia de desprendimiento de pares de vórtices. Se destaca que, como la misma está elevada al cuadrado en la expresión 4.9, un error en la estimación de la misma se eleva al cuadrado al calcular el parámetro ϕ . De las simulaciones con $Re = 150$, una se realizó con $\phi \neq \phi_{res}$ y otra con $\phi = \phi_{res}$. Ésta última se realizó en dos fases. En primer lugar se estimó el parámetro de resonancia ϕ_{res}^I utilizando como frecuencia de excitación la frecuencia estimada mediante la fórmula empírica 4.6. Luego se eligieron E y ρ tales que resulte $E/\rho = \phi_{res}^I$ y se inició el cálculo del caso. Una vez que hubieron suficientes vórtices desprendidos como para estimar la frecuencia de desprendimiento

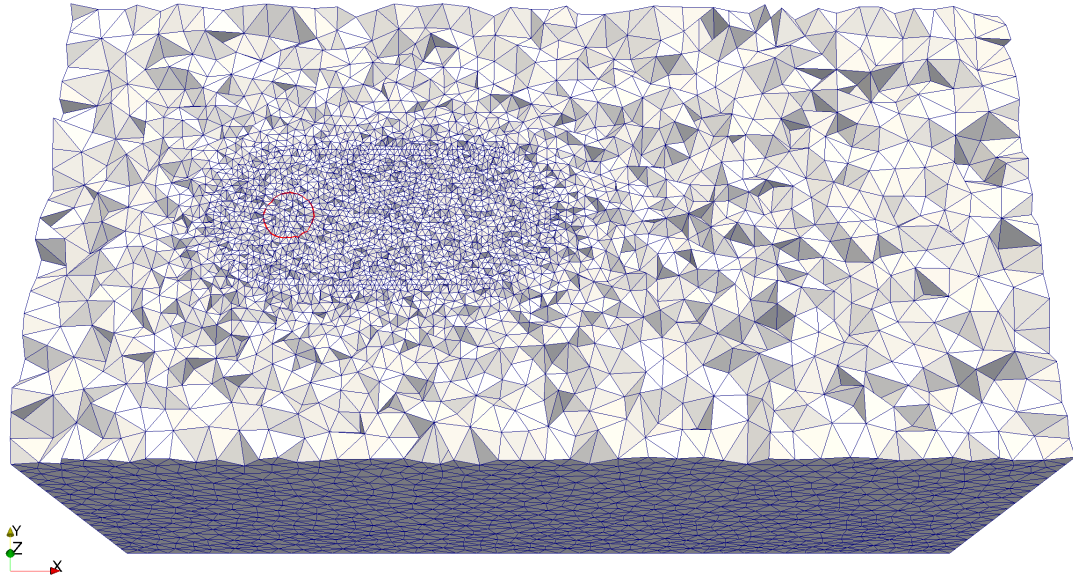
f_3 utilizando los datos de la simulación, se corrigió el módulo de Young de forma que resulte $E/\rho = \phi_{res}^{II}$, donde ϕ_{res}^{II} es la nueva estimación del parámetro de resonancia usando $f_{exc} = f_3$. Los parámetros elastodinámicos seleccionados en cada simulación pueden verse en la tabla 4.5.

Los parámetros de Lamé pueden calcularse a partir del módulo de Young y de Poisson seleccionados empleando las ecuaciones 4.10.

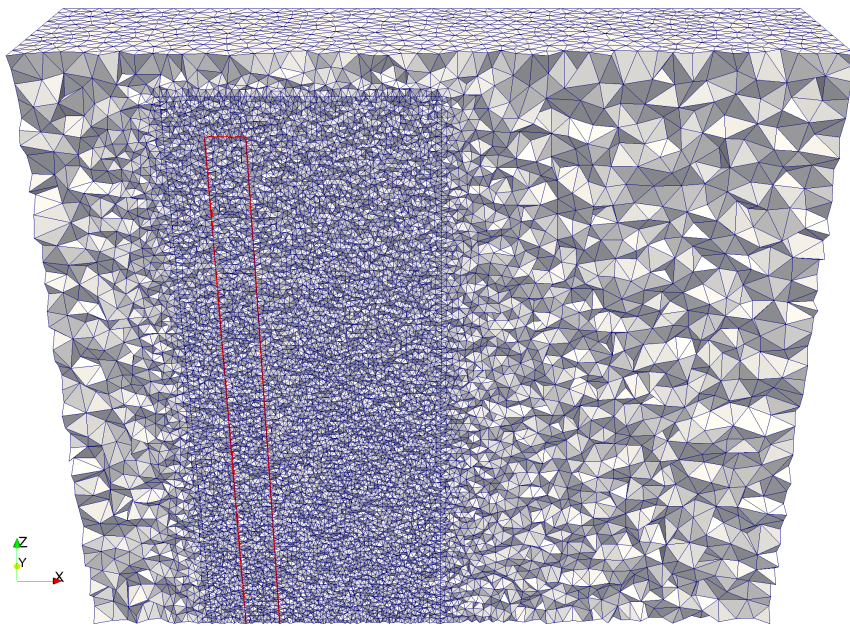
$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}\end{aligned}\tag{4.10}$$

Los parámetros numéricos de la simulación fueron ajustados de forma iterativa. Es interesante destacar que la elección del paso de tiempo puede influenciar drásticamente el resultado de la simulación en este problema particular. La experiencia muestra que, para poder observar el fenómeno de desprendimiento de vórtices de Von Karman se debe emplear un paso de tiempo $\Delta t \ll V_\infty D$, donde el término a la derecha de la inecuación es una estimación del tiempo que tarda una partícula de fluido en atravesar la región ocupada por el cilindro. En caso de elegir un paso de tiempo mayor a $V_\infty D$, no se observará el fenómeno y, en cambio, se observará la generación de una estela turbulenta aguas abajo del obstáculo (así como ocurre en la configuración para altos Reynolds en la figura 4.10). Este requerimiento en el paso temporal restringe la posibilidad de realizar simulaciones a altos números de Reynolds ya que un aumento en V_∞ deriva en una gran disminución del paso de tiempo, con el consecuente aumento en el costo computacional. Además, se requiere utilizar una malla en la cual el tamaño de los elementos adyacentes a la superficie del cilindro y de los elementos ubicados aguas abajo del obstáculo permita observar con definición las zonas ocupadas por los vórtices. Como usar dicho tamaño de malla en todo el dominio sería prohibitivo en lo que respecta al costo computacional, se utiliza una malla con tamaño de elemento variable. Se observan cortes de la misma en la figura 4.13. En cuanto a la malla del sólido, se seleccionó un tamaño de elemento igual al de la zona del fluido adyacente. Esto se debe no a la búsqueda de precisión en el resultado, sino a que se observó una disminución del deterioro de la calidad de los elementos adyacentes al sólido si la malla del fluido ficticio y la del sólido coinciden. Esto último se debe, a su vez, a que en el paso de ajuste de la malla del fluido al contorno del sólido, que tiene lugar obligatoriamente en el primer paso de tiempo, se perjudica la calidad de los elementos de la malla del fluido si deben ser desplazados por encima de un cierto límite. Los parámetros empleados en las simulaciones fueron

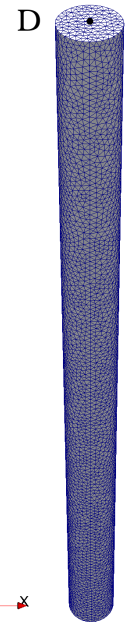
los que se observan en la tabla 4.6.



(a) Corte longitudinal en el plano $z = 8,5$ de la malla del fluido



(b) Corte longitudinal en el plano $y = 0$ de la malla del fluido



(c) Malla del sólido

Figura 4.13: Vistas en corte de las mallas del fluido y sólido empleadas y ubicación del punto de referencia D en la malla del sólido.

En el presente trabajo se simulan 3 casos diferentes. La geometría del canal y el obstáculo es la misma en los tres casos. El caso 1 consiste en la simulación del problema de IFE con un número de Reynolds de $Re = 20$. Los casos 2 y 3 consisten en la simulación del problema con Reynolds $Re = 150$, que está dentro del rango en el cual se genera la calle de vórtices de Von Kármán. Para el caso 2, se seleccionan valores

para el módulo de Young y la densidad del sólido tales que el parámetro ϕ se encuentra alejado del valor de resonancia ϕ_{res} . En el caso 3, como se mencionó anteriormente, se simula el comportamiento del sistema para un valor de ϕ cercano a ϕ_{res} . Sin embargo, una vez alcanzado el régimen de generación de vórtices de Von Kármán, se calcula una nueva estimación de ϕ_{res} usando los resultados parciales de la simulación y se cambia el módulo de Young del sólido de forma que el cociente E/ρ sea igual a la nueva aproximación del parámetro ϕ_{res} .

La duración de las simulaciones de los casos mencionados, realizadas en el cluster del departamento de Mecánica Computacional del Centro Atómico Bariloche, va desde 2 días para el caso 1 hasta 2 semanas para el caso 3.

Nombre [Unidades]	Símbolo	Magnitud Caso 1	Magnitud Caso 2	Magnitud Caso 3
Velocidad a la entrada [m/s]	V_∞	0.02	0,15	0.15
Densidad del fluido [kg/m ³]	ρ_f	1000	1000	1000
Viscosidad del fluido [kg/(m s)]	μ_f	1,0	1,0	1.0
Densidad del fluido ficticio [kg/m ³]	ρ_{ff}	10000	1000	10000
Viscosidad del fluido ficticio [kg/(m s)]	μ_{ff}	1,0	1,0	1,0

Tabla 4.4: Parámetros fluidodinámicos de las simulaciones.

Nombre [Unidades]	Símbolo	Magnitud Caso 1	Magnitud Caso 2	Magnitud Caso 3
Módulo de Young [Pa]	E	$17,2e + 6$	$5,4e + 6$	$17,2e + 6 - 11,2e + 6$
Módulo de Poisson	ν	0,3	0,3	0,3
Densidad del sólido [kg/m ³]	ρ_s	10000	1000	10000

Tabla 4.5: Parámetros elastodinámicos de las simulaciones.

Nombre [Unidades]	Símbolo	Magnitud Caso 1	Magnitud Caso 2	Magnitud Caso 3
Paso temporal [s]	Δt	5	0,5	0,5
Parámetro de reseteo de malla	χ	10000	10000	10000
Maximo número de iteraciones FSI	maxit_{FSI}	12	12	12
Theta desplazamientos sólido	θ_1	1,0	1,0	1,0
Theta velocidades sólido	θ_2	1,0	1,0	1,0
Theta fluido	θ_f	1,0	1,0	1,0

Tabla 4.6: Parámetros numéricos más relevantes de las simulaciones.

4.4.2. Resultados y discusión

En esta sección se muestran, en primer lugar, los resultados obtenidos para la simulación del flujo en el canal obstruido para diferentes números de Reynolds. Se comparan los resultados obtenidos en los casos 1 y 2.

Como se puede observar en las figuras 4.14 y 4.15, sólo se genera una calle de vórtices de Von Karman para el caso con $Re = 150$, que se encuentra dentro del rango previsto experimentalmente. Para el caso con $Re = 20$ no se observa desprendimiento de vórtices. Estos resultados se muestran coherentes con los resultados experimentales existentes [17]. Con respecto a los vórtices que se visualizan en las figuras 4.15 y 4.14, se observa que éstos están bien definidos en la cercanía del obstáculo, mostrándose más difusos a medida que se incrementa la distancia al obstáculo. Esto se debe a dos motivos: el término disipativo en la ecuación de Navier-Stokes para un flujo viscoso y el hecho de que la densidad de la malla del fluido disminuye a medida que incrementa la distancia al obstáculo para disminuir el costo computacional de las corridas.

Se estudió en mayor detalle el caso 2 con $Re = 150$, para determinar si la frecuencia de desprendimiento de vórtices en la simulación numérica se aproxima a la predicha por la correlación expuesta en 4.6. Para ello, se analizó la variación de la presión en puntos dentro de la calle de vórtices que se observan en la figura 4.17. Utilizando el número de ciclos (teniendo en cuenta solo los ciclos estables que se observan a partir de $t = 200$) y el intervalo de tiempo transcurrido, se puede hallar la frecuencia de desprendimiento de vórtices. La misma es de $f_2 = 0,0207$. Siendo que la frecuencia obtenida mediante la correlación 4.6 para un número de Reynolds de 150 es $f_{ref} = 0,0258$, el error porcentual en la frecuencia hallada mediante el método numérico es del 20 %. En las figuras 4.18 y 4.19 se pueden observar las presiones en función del tiempo de los puntos A y B, y la velocidad en y en función del tiempo en el punto C, respectivamente.

Como se observa en la figura 4.18, el sistema alcanza un régimen de generación estable de vórtices alrededor del tiempo $t = 350$. Para tiempos anteriores a éste, se observa el desprendimiento de un par de vórtices simétricos como se muestra en la figura 4.16. Luego de esto, ocurre una inestabilidad crítica y comienza la generación de vórtices de forma alternada. Se observa que las presiones en los puntos A y B están en contrafase, lo cual es esperable dada la ubicación de los mismos (simétrica respecto al plano $y = 0$).

Las oscilaciones en la presión que se observan para los primeros pasos de tiempo (aproximadamente hasta $t = 20$) se deben a la aplicación brusca de una condición de borde no nula en la velocidad de entrada. En estos casos, la presión actúa como un mul-

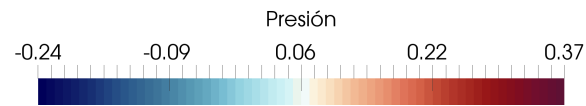
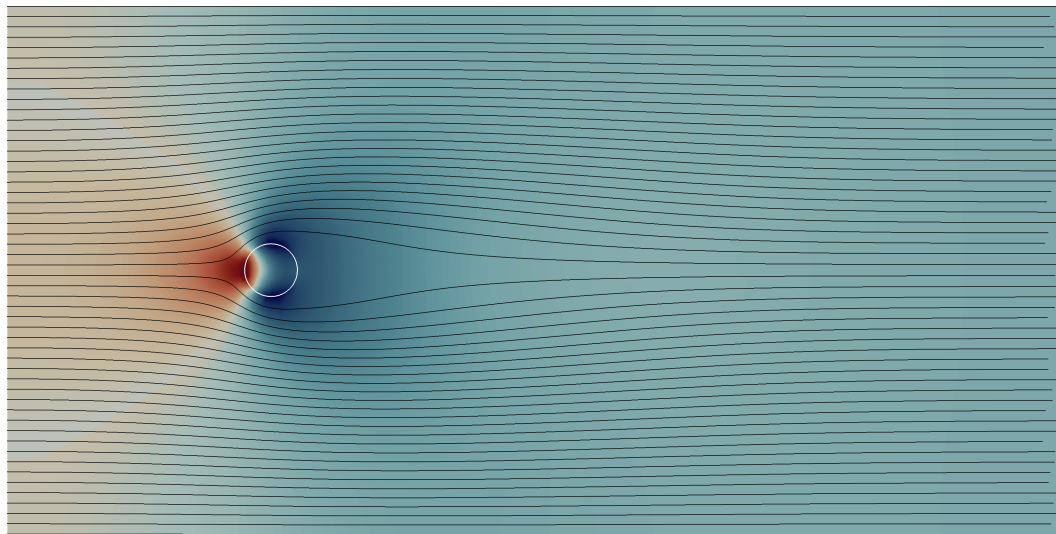
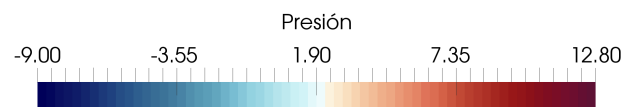
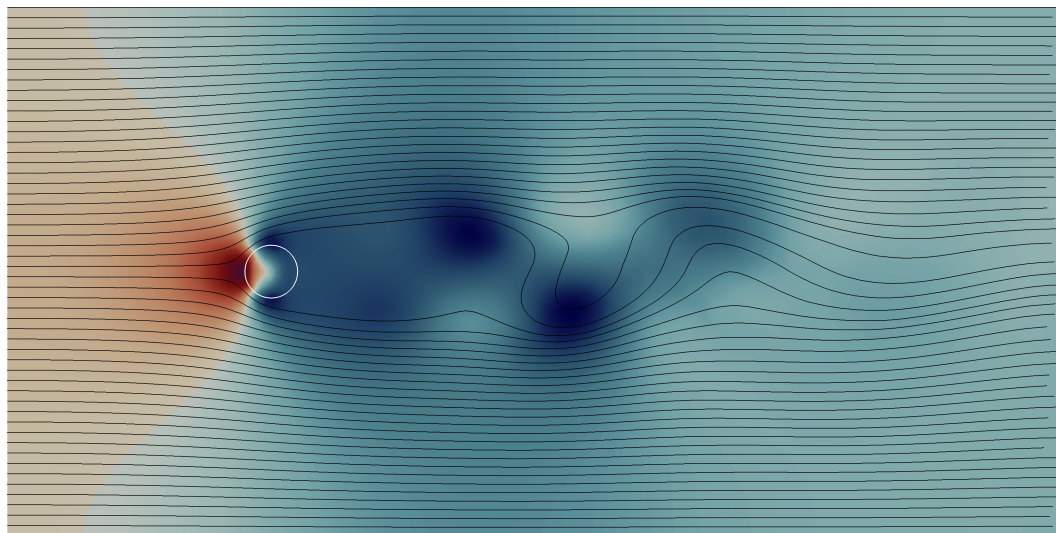
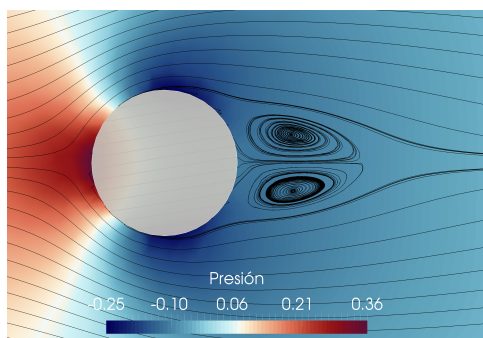
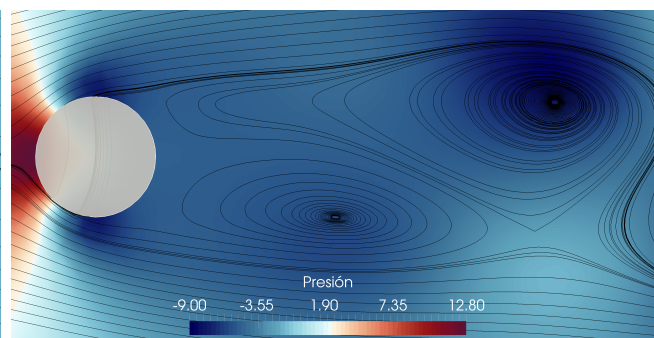
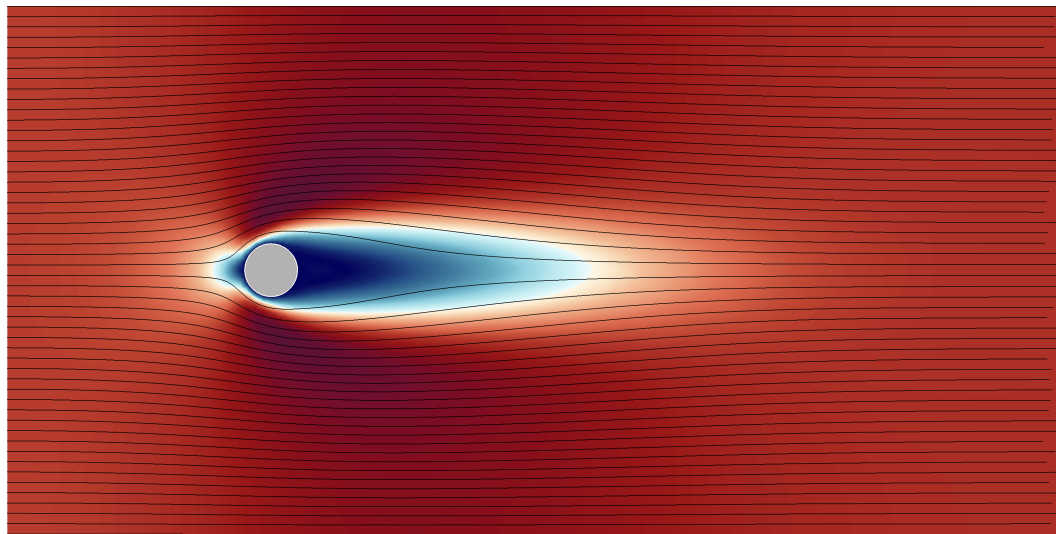
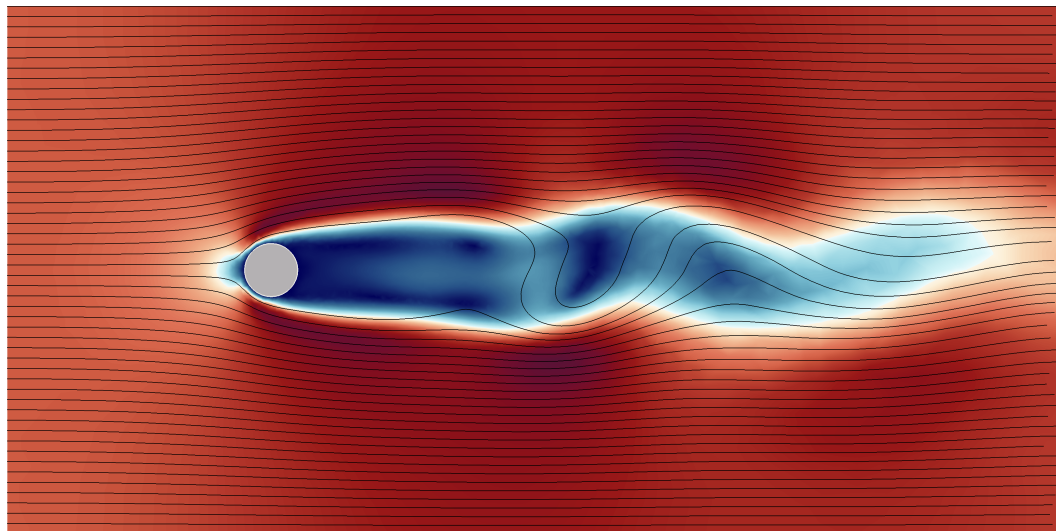
(a) Caso 1: $Re = 20$ (b) Caso 2: $Re = 150$ (c) Caso 1: $Re = 20$ (d) Caso 2: $Re = 150$

Figura 4.14: Visualización de las características del flujo a través de las presiones en el plano $z = 7,5$ a tiempo $t = 450$



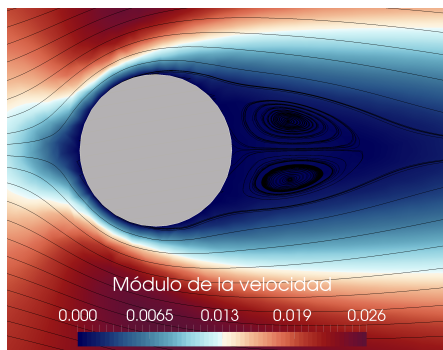
Módulo de la velocidad
0.000 0.0065 0.013 0.019 0.026

(a) Caso 1: $Re = 20$



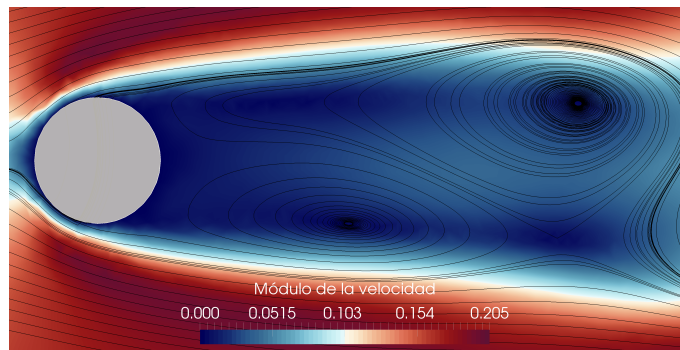
Módulo de la velocidad
0.000 0.0515 0.103 0.154 0.205

(b) Caso 2: $Re = 150$



Módulo de la velocidad
0.000 0.0065 0.013 0.019 0.026

(c) Caso 1: $Re = 20$



Módulo de la velocidad
0.000 0.0515 0.103 0.154 0.205

(d) Caso 2: $Re = 150$

Figura 4.15: Visualización de las características del flujo a través del módulo de la velocidad en el plano $z = 7,5$ a tiempo $t = 450$

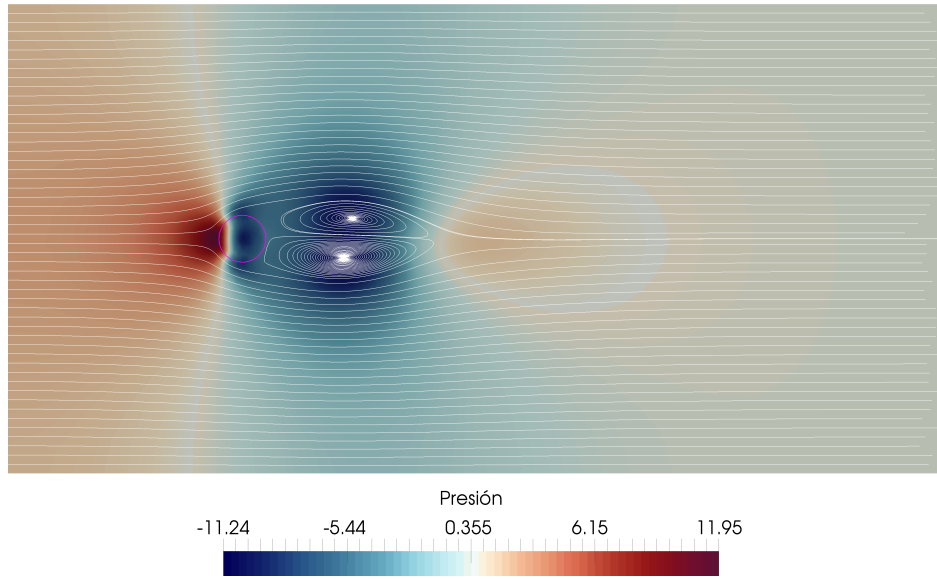


Figura 4.16: Desprendimiento de par de vórtices simétricos observado para tiempos inferiores a $t = 150$. Visualización de presiones y líneas de corriente.

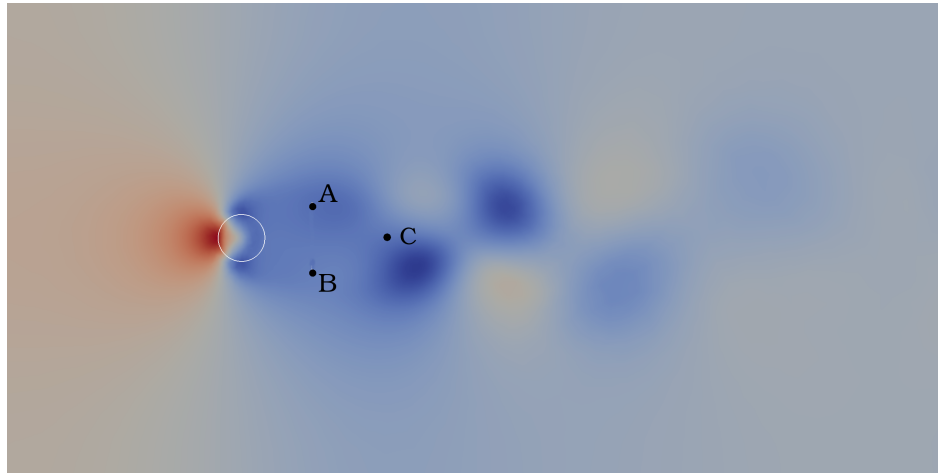


Figura 4.17: Ubicación de los puntos A, B y C en el plano $z = 7.5$.

tiplicador de Lagrange, ajustando su valor de manera tal de garantizar que la velocidad sea la fijada por la condición de borde. El salto brusco de velocidad cero a velocidad V_∞ produce estas oscilaciones. Para contrarrestar este efecto se sugiere, en un trabajo futuro, utilizar condiciones de borde dependientes del tiempo que comiencen con valor nulo e incrementen su magnitud de forma gradual hasta llegar al valor deseado.

Al desprenderse vórtices de forma alternada sobre el contorno del cilindro, se genera un campo de presiones alternante que excita al sólido elástico y produce oscilaciones en el mismo. La frecuencia de excitación es la frecuencia de desprendimiento de vórtices. A partir de los datos obtenidos se puede hallar la frecuencia de oscilación del sólido que es $f_{sol_2} = 0,0278$.

Se puede observar en la figura 4.21, que inicialmente predominan los desplazamien-

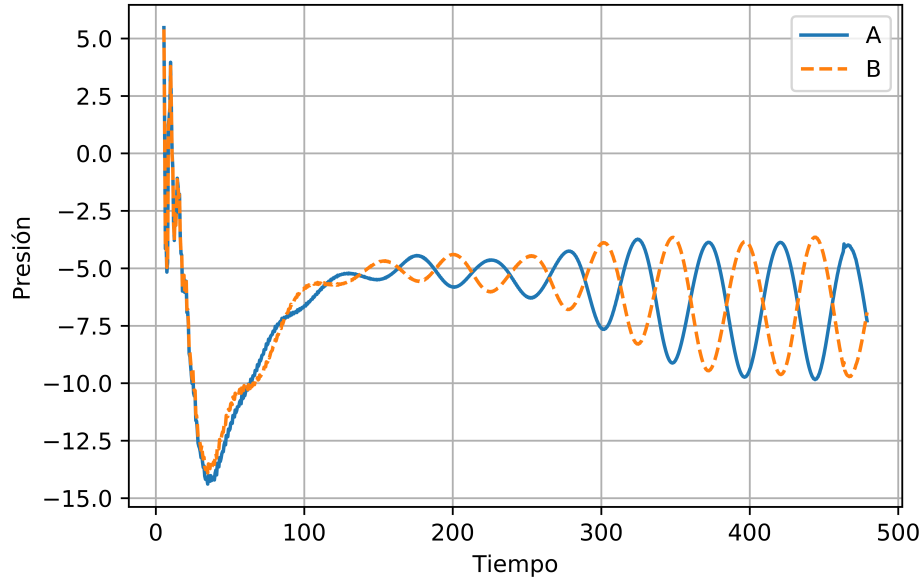


Figura 4.18: Presiones en función del tiempo de los puntos A y B (Figura 4.17) para el caso 2.

tos en la dirección x . Sin embargo, una vez fue alcanzada la posición de equilibrio en x , comienzan a predominar las oscilaciones en y , originadas por el campo de presiones generado por los vórtices de Von Kármán.

Además se observa que, el valor de equilibrio para el desplazamiento en x de la punta del cilindro en el estacionario es 0,41, que es del orden de la estimación que se provee en el Apéndice B, de $\delta_{ref}^2 = 0,31$.

Para el caso 1, puede observarse en la figura 4.20 (a) que el valor de equilibrio alcanzado para el desplazamiento x es de 0,0037, que es del orden de la estimación provista en el apéndice B, de $\delta_{ref}^1 = 0,0029$. Al no haber desprendimiento de vórtices, la posición y se estabiliza en cero.

Finalmente, se exponen los resultados obtenidos para el caso 3 y se comparan con los resultados del caso 2. En cuanto al comportamiento fluidodinámico del sistema, la solución numérica obtenida no difiere significativamente de la solución para el caso 2, ya que ambas simulaciones se realizaron utilizando el mismo número de Reynolds $Re = 150$. Nuevamente, se observa el desprendimiento de dos vórtices simétricos para tiempos inferiores a $t = 150$. Luego, una inestabilidad crítica constituye el factor desencadenante para el desprendimiento sucesivo de vórtices de Von Kármán. El patrón de flujo observado muestra concordancia con los resultados experimentales [17]. En la figura 4.22 se observan las presiones en los puntos de medición A y B en función del tiempo. Se evidencian cambios en la frecuencia de desprendimiento de vórtices antes y

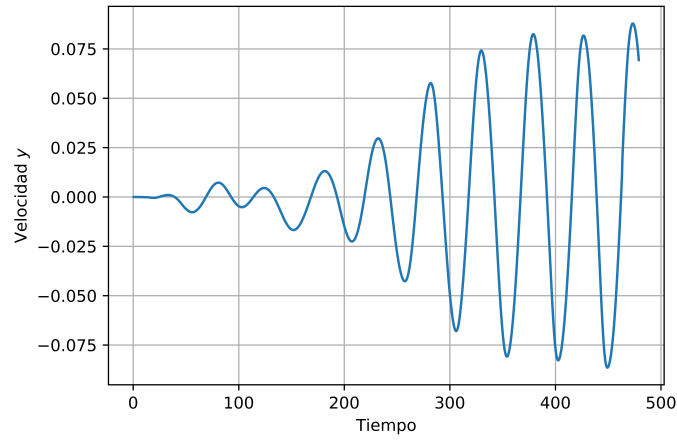
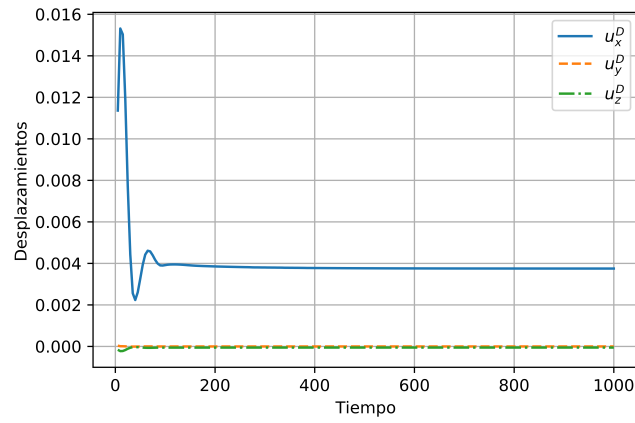
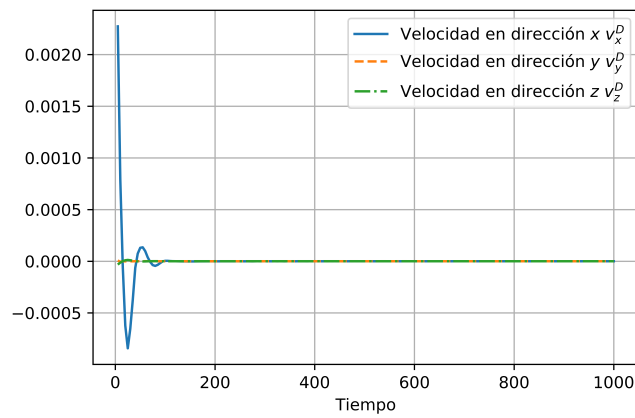


Figura 4.19: Velocidad en y en función del tiempo en el punto C para el caso 2.



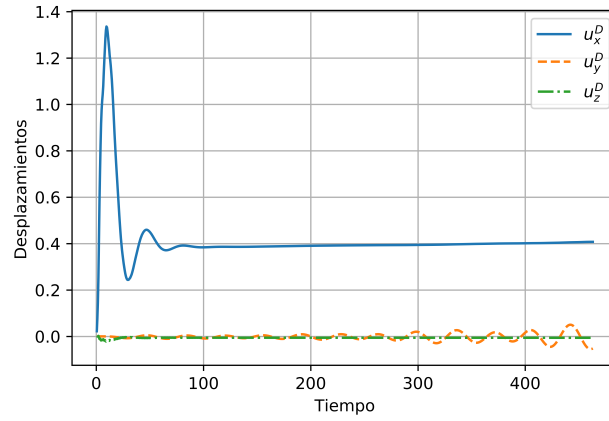
(a) Desplazamientos en D



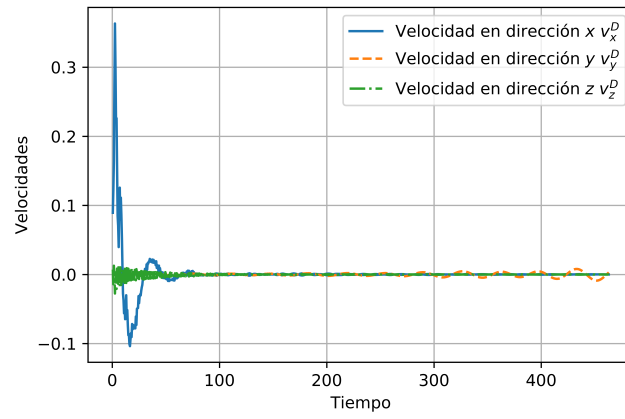
(b) Velocidades en D

Figura 4.20: Desplazamientos y velocidades en el punto D en función del tiempo para el caso 1.

después del cambio en el modulo de Young del sólido, que se da a tiempo $t = 400$. La frecuencia calculada usando la información previa al cambio de Módulo de Young es



(a) Desplazamientos en D



(b) Velocidades en D

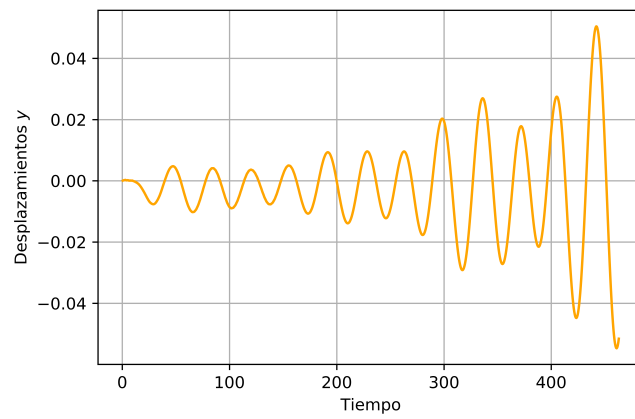
(c) Desplazamientos en dirección y en D

Figura 4.21: Desplazamientos y velocidades en el punto D en función del tiempo para el caso 2.

$f_s^I = 0,021$. Utilizando esta frecuencia se halló el módulo de Young $E_{res} = 11,2 \cdot 10^6$. Ya que en esta simulación se han obtenido resultados para un intervalo de tiempo mayor

que para el caso 2, se puede obtener una mejor resolución en el cálculo de la frecuencia de desprendimiento de vórtices. En este caso, usando los datos obtenidos para $t=400$ en adelante, se obtuvo una frecuencia de $f_3 = 0,0236$. En este caso, el error con respecto a la frecuencia de referencia $f_{ref} = 0,0258$ hallada mediante la correlación experimental 4.6, es del 9%. En la figura 4.23 se pueden observar las velocidades en la dirección y para los casos 2 y 3. Se puede ver que hay una variación en la frecuencia de oscilación en la velocidad. Esto evidencia la influencia de las propiedades del sólido en la solución numérica para el flujo aguas abajo del obstáculo.

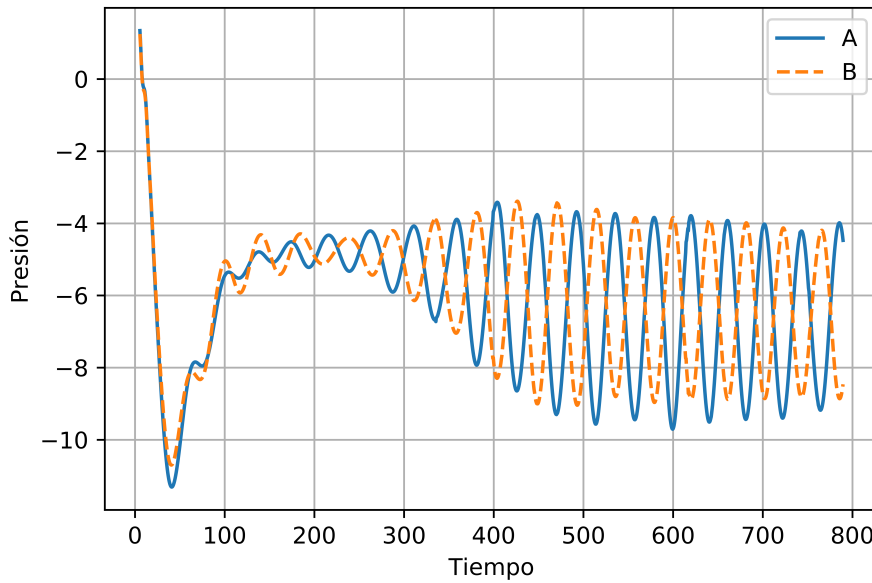


Figura 4.22: Presiones en función del tiempo de los puntos A y B (Figura 4.17) para el caso 3.

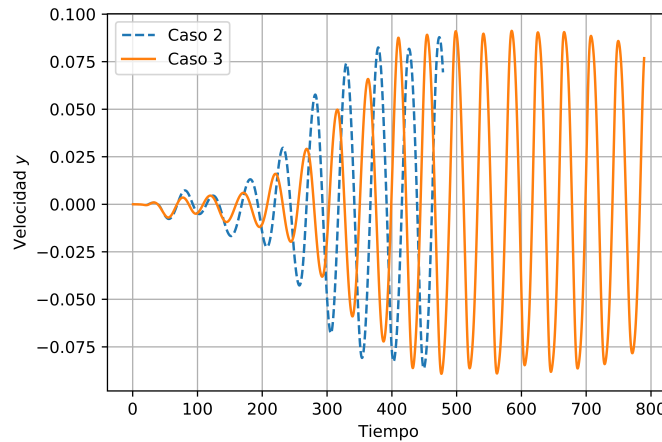


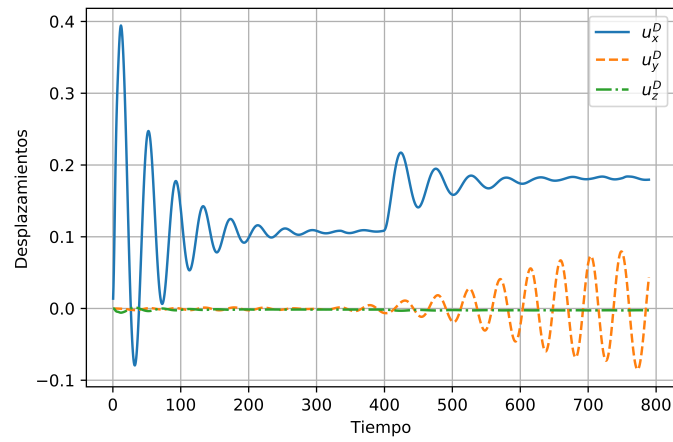
Figura 4.23: Velocidad en y en función del tiempo en el punto C para los casos 2 y 3.

En lo que respecta a la elastodinámica del caso estudiado, en los casos 2 y 3, la respuesta del cilindro en cuanto a los desplazamientos en la dirección del flujo son

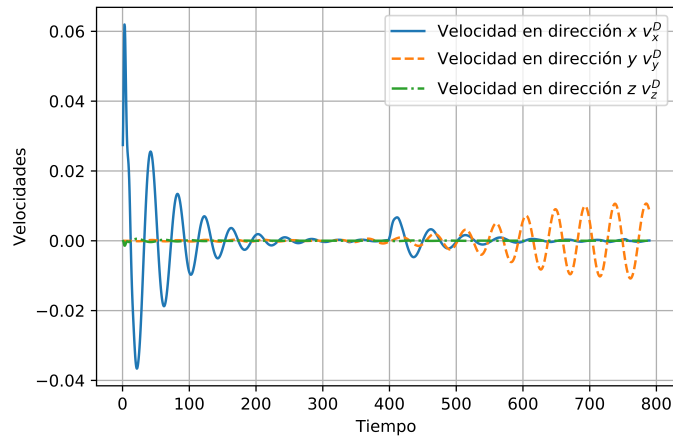
similares, sin embargo, se observan comportamientos marcadamente distintos en cuanto a las oscilaciones en la dirección del campo excitador. Pueden observarse en la figura 4.24(a) los desplazamientos en la punta del cilindro para el caso 3. Se evidencia un cambio en el comportamiento a $t = 400$, cuando ocurre el cambio de módulo de Young. Se observa que la máxima deflexión en la punta en la dirección x se estabiliza en un valor de $\delta_3^I = 0,106$ para tiempos anteriores a $t = 400$, y en $\delta_3^{II} = 0,180$ para el nuevo módulo de Young. Los valores hallados son del orden de las estimaciones propuestas en el apéndice B, que son $\delta_{ref\ 3}^I = 0,096$ y $\delta_{ref\ 3}^{II} = 0,147$, respectivamente. Se observa un aumento del tiempo característico de amortiguamiento con respecto al caso 2. Esto se debe al aumento de la densidad del sólido, aumentando la inercia del mismo.

En la figura 4.24 (c) se muestran los desplazamientos en y de la punta del cilindro en función del tiempo. Como se puede observar, se produce un aumento sostenido de la amplitud de las oscilaciones en esta dirección luego del tiempo en que se modifica el módulo de Young para que la frecuencia de resonancia del cilindro equivalga a la frecuencia de desprendimiento de vórtices. Las amplitudes alcanzadas son incluso mayores que las observadas para el caso 2, en la figura 4.21 (c), donde el material es incluso menos rígido que el del caso 3 (en este último el módulo de Young es aproximadamente el doble que el del caso 2). Lo expuesto constituye evidencia de que se observa el fenómeno de resonancia a partir de $t=400$ en adelante. Se calculó la frecuencia de las oscilaciones en el desplazamiento en la dirección y del sólido, obteniéndose un valor de $f_{sol\ 3} = 0,0215$.

En la figura 4.25 se muestra una visualización tridimensional de la calle de vórtices de Von Kármán generada con el código computacional que se desarrolló en este trabajo.



(a) Desplazamientos en D



(b) Velocidades en D

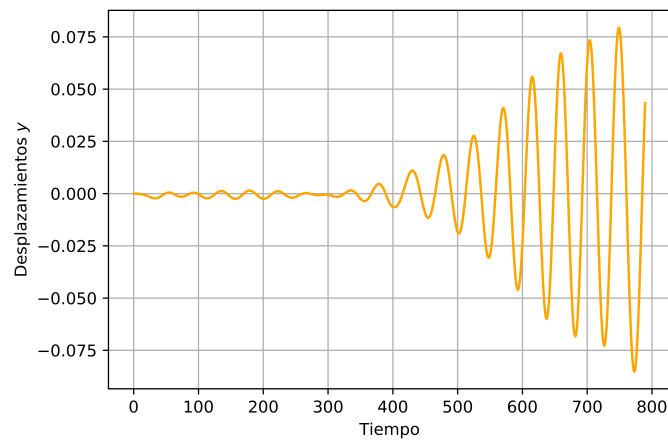
(c) Desplazamientos en dirección y en D

Figura 4.24: Desplazamientos y velocidades en el punto D en función del tiempo para el caso 3.

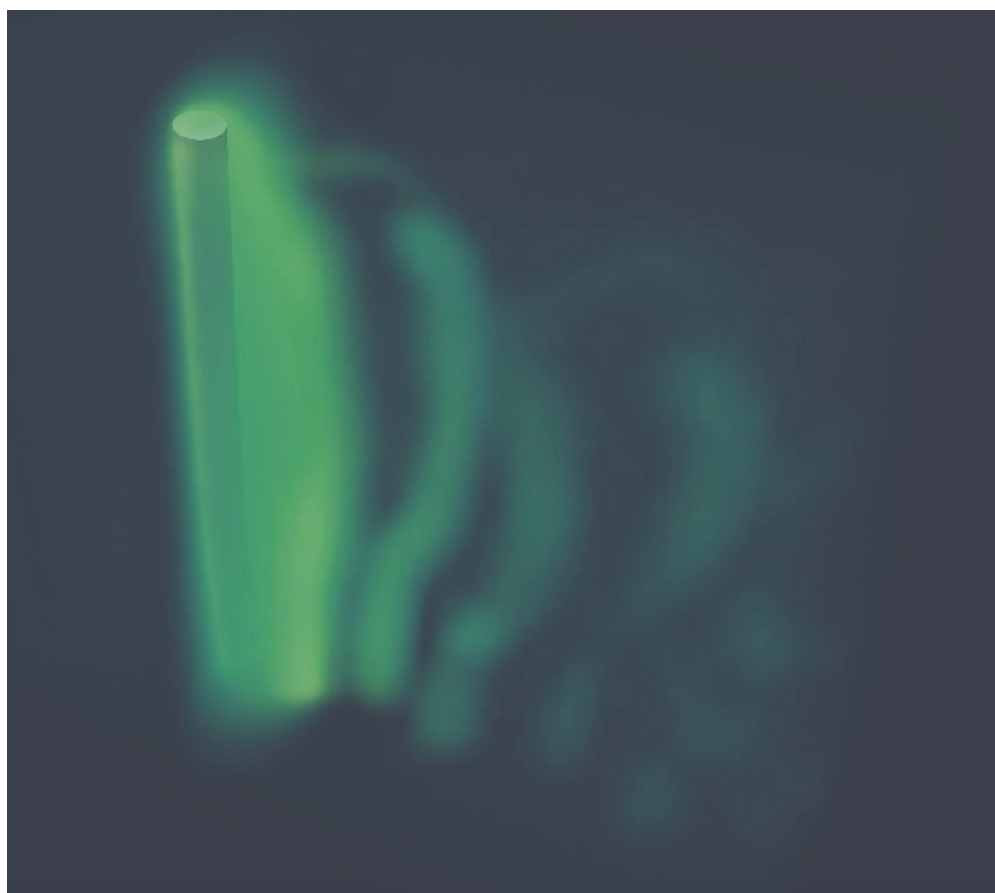


Figura 4.25: Visualización 3D a partir de las presiones de los vórtices de la calle vórtices de Von Kármán obtenida para el caso 2 mediante el código desarrollado.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Conclusiones

En el presente trabajo se desarrolló un código computacional capaz de resolver problemas de interacción fluido-estructura de sólidos elásticos inmersos en fluidos incompresibles. El código desarrollado tomó como base el algoritmo descrito por Dari, E. A. et al. en [9].

Se presentó la formulación matemática en la que se basa el código. Se introdujo un modelo matemático para modelar el problema de elasticidad lineal y la forma en la que éste se integra a las ecuaciones desarrolladas por Blanco, P. J. et al. en [4]. Se detalló la forma en la que se realiza la discretización por el Método de los elementos Finitos de la formulación presentada para el sólido.

Se detalló el funcionamiento del código desarrollado, introduciendo en la descripción las nuevas rutinas generadas para la comunicación entre los problemas del fluido y del sólido y para la resolución del problema de elastodinámica en sí.

Se realizó una validación del código desarrollado. La misma se dividió en tres partes. En primera instancia, se realizó una validación del módulo implementado para resolver las ecuaciones de elasticidad lineal. Para ello, se calculó la deflexión máxima de una viga en voladizo con una carga concentrada en su extremo libre usando el código computacional generado. Los resultados obtenidos mostraron acuerdo con la solución analítica hallada usando el modelo de vigas de Euler-Bernoulli [18]. Mediante el uso de una malla con 40 elementos en el espesor de la viga en la dirección de aplicación de la carga, se obtuvo una solución numérica con un error relativo del 0.4 % respecto al valor de referencia.

Posteriormente se validó la subrutina del programa encargada de transmitir los términos del fluido necesarios para resolver el problema del sólido. Para ello se modeló el flujo a través de un canal con un sólido elástico sin restricción en sus desplazamientos inmerso en un fluido cuya densidad es la misma que la del sólido. Al haber una diferencia de presiones entre la entrada y salida del conducto, la solución analítica del problema corresponde a un flujo pistón, donde el conjunto fluido-sólido se mueve como si fuese un sólido rígido con una aceleración constante. Se calculó la aceleración del obstáculo usando el código immALE con un error del 0,2 % con respecto a la solución analítica.

Finalmente, se simuló un problema en el cual se explotan todas las potencialidades del código desarrollado. El mismo consiste en el flujo a través de un canal parcialmente obstruido por un cilindro elástico. Se simularon casos con números de Reynolds de $Re = 20$ y $Re = 150$. Se comprobó que la principal limitación del código desarrollado consiste en la dificultad para simular problemas con números de Reynolds correspondientes a regímenes turbulentos, con costos computacionales acotados. En todos los casos simulados se obtuvieron soluciones coherentes con el comportamiento detallado por Williamson, C. H. K. en [17]. Se observó un patrón de vórtices de Von Kármán para los casos con $Re = 150$. Se logró calcular la frecuencia de desprendimiento de Vórtices con un error del 9 % con respecto al valor de referencia obtenido mediante la relación empírica expuesta en [5]. Se observó que cambios en las propiedades del material que compone al sólido producen cambios en la frecuencia de desprendimiento de vórtices calculada. Por otra parte, se obtuvieron en todos los casos resultados del orden de la estimación realizada para la máxima deflexión en la dirección del flujo del cilindro en el estacionario. Además, se logró simular el fenómeno de resonancia al ajustar los parámetros materiales del sólido de forma que su frecuencia de resonancia sea la misma que la frecuencia de desprendimiento de pares de vórtices. Se comprobó la aparición de ciertas dificultades al momento de determinar la frecuencia de excitación del sólido. Siendo que la diferencia entre la frecuencia estimada mediante la expresión empírica difiere en un mínimo de 9 % con la frecuencia de desprendimiento en la solución numérica, esta diferencia se amplifica al intentar calcular los parámetros materiales del sólido para visualizar la resonancia.

5.2. Trabajo a futuro

Se proponen como trabajo a futuro las siguientes tareas. En primer lugar se debe mejorar el criterio para realizar el reseteo de malla, que tenga en cuenta la calidad de los elementos luego de ser deformados. Además se sugiere realizar una verificación post-reseteo de malla buscando identificar elementos de baja calidad, pares de nodos

demasiado cercanos e implementar un criterio para seleccionar cuáles nodos mover para corregir estos defectos en la malla y definir el desplazamiento de dichos nodos. Posiblemente se mejore la calidad del reseteo de malla empleando algún tipo de algoritmo adaptivo, pero de esta forma se perdería la conservación de las conectividades de la malla.

Para próximas simulaciones con condiciones de borde distintas de cero (por ejemplo en la velocidad de entrada al canal), se sugiere implementar una condición de borde dependiente del tiempo, que vaya desde cero hasta el valor inicial requerido en forma gradual. De esta forma se reducen los problemas de inestabilidad producidos en los primeros pasos de tiempo debido a la introducción brusca de una condición de borde distinta de cero en el modelo computacional.

Además se propone diseñar y realizar nuevos experimentos, para problemas de interacción fluido estructura no mencionados en este trabajo, que permitan validar los resultados obtenidos mediante el código contrastándolos con resultados experimentales reales, y permitir de esta forma explotar la generalidad del código desarrollado.

Finalmente, se propone utilizar el código para modelar un caso complejo, como por ejemplo, el flujo alrededor de los elementos combustibles del Reactor RA-10. La principal complejidad que presenta este caso es que el flujo se produce en régimen turbulento. Por lo tanto, será necesario introducir algún modelo de turbulencia en el modelado del problema fluidodinámico.

Apéndice A

Modos de oscilación de una viga empotrada con un extremo libre

Sea una viga de longitud L , área transversal constante A y momento de inercia de la sección transversal respecto al plano neutro I ; compuesta de un material con módulo de Young E , módulo de Poisson ν y densidad ρ . Sea un eje de coordenadas donde el eje x es paralelo al eje longitudinal de la viga y el eje y es paralelo a la dirección en la cual se produce la excitación; se pueden hallar los modos de vibración de la viga utilizando el modelo de Vigas de Euler Bernoulli siempre y cuando se cumplan las siguientes hipótesis:

Hipótesis de comportamiento elástico: el material de la viga es elástico lineal, con módulo de Young E y coeficiente de Poisson despreciable.

Hipótesis de la flecha vertical: en cada punto el desplazamiento vertical solo depende de x : $u_y(x, y) = w(x)$.

Hipótesis de la fibra neutra: Los puntos de la fibra neutra solo sufren desplazamiento vertical y giro: $u_x(x, 0) = 0$. La tensión perpendicular a la fibra neutra se anula: $\sigma_{yy} = 0$.

Hipótesis de Bernoulli Las secciones planas inicialmente perpendiculares al eje de la viga, siguen siendo perpendiculares al eje de la viga una vez curvado.

Bajo dichas hipótesis, por lo tanto, el desplazamiento vertical de la viga puede ser modelado mediante la siguiente ecuación diferencial de cuarto orden [18]:

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \quad (\text{A.1})$$

Teniendo en cuenta que las ecuaciones para hallar el momento flector M y el corte V en la viga en función de x y t son:

$$\begin{aligned} M(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \right) \\ V(x, t) &= -\frac{\partial M}{\partial x}(x, t), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

,

y considerando que el producto EI es constante a lo largo de toda la viga, las condiciones de borde apropiadas, para todo $t \in (0, T)$, para el caso de una viga empotrada (en $x = 0$) con un extremo ($x = L$) libre son las siguientes:

$$\begin{aligned} y(x, t) \Big|_{x=0} &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \Big|_{x=0} &= 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Big|_{x=L} &= 0 \\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x, t) \Big|_{x=L} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Por lo tanto, para hallar los modos normales de la viga se propone hallar $y(x, t) = Y(x)e^{i\omega t}$ no trivialmente nula que sea solución de la ecuación A.1, con $Y(x)$ tal que cumpla las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} Y(x) \Big|_{x=0} &= 0 \\ \frac{dY}{dx}(x) \Big|_{x=0} &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dx^2}(x) \Big|_{x=L} &= 0 \\ \frac{d^3 Y}{dx^3}(x) \Big|_{x=L} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

De esta forma se obtiene que para que la solución no sea trivial, la frecuencia de

oscilación ω debe ser tal que:

$$1 + \cosh(C_i) \cos(C_i) = 0 \quad \text{con } C_i^4 = \frac{\rho A \omega_i^2 L^4}{EI} \quad \text{e } i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.5})$$

Por lo tanto las primeras raíces C_i de la ecuación nos darán las frecuencias angulares ω_i correspondientes a los primeros modos normales de oscilación. Una vez obtenida la frecuencia se puede hallar también la forma de dichos modos resolviendo:

$$Y(x) = K \left[-\sinh\left(C_i \left(1 - \frac{x}{L}\right)\right) + \sinh\left(C_i \frac{x}{L}\right) \cos(C_i) - \cosh\left(C_i \frac{x}{L}\right) \sin(C_i) + (\sinh(C_i) + \sin(C_i)) \cos\left(C_i \frac{x}{L}\right) - (\cosh(C_i) + \cos(C_i)) \sin\left(C_i \frac{x}{L}\right) \right]. \quad (\text{A.6})$$

Donde K es una constante arbitraria. Se pueden observar en la figura A.1 los modos normales y el coeficiente C_i para los tres primeros modos de vibración.

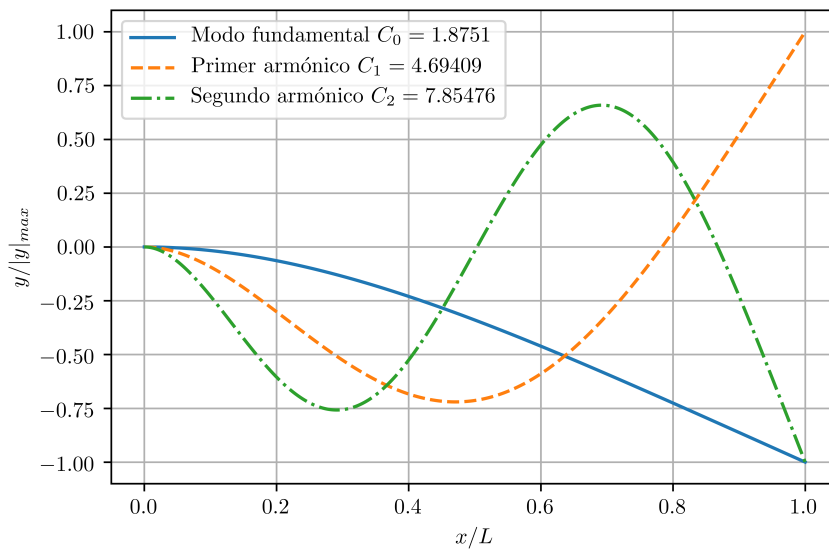


Figura A.1: Forma modal y coeficiente C_i de los tres primeros modos de vibración de una viga con un extremo empotrado y un extremo libre.

Apéndice B

Estimación de la deflexión máxima en una viga empotrada cilíndrica sometida a un flujo transversal de corriente

Sea una viga cilíndrica de longitud L , sección transversal constante de área A y momento de inercia respecto al plano neutro I ; compuesta de un material con módulo de Young E y módulo de Poisson ν ; cuyo eje longitudinal es paralelo al eje z y la cual está sometida en un flujo en dirección x ; se puede estimar la deflexión máxima en el extremo libre de la viga para el caso estacionario:

En primer lugar, se estima la fuerza por unidad de longitud aplicada en la viga debido a la presión dinámica del fluido. En la figura B.1 se observa la dependencia del coeficiente de arrastre con el número de Reynolds para un cilindro inmerso en un flujo transversal a su eje [5]. De esta forma se puede obtener el coeficiente de arrastre para diferentes números de Reynolds. En particular, se obtiene $C_D = 1,98$ para $Re = 20$ y $C_D = 1,17$ para $Re = 150$.

La relación entre el coeficiente de Drag y la fuerza aplicada sobre el cilindro está dada por la ecuación B.1

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho_f V_{inf}^2 A_p} \quad (B.1)$$

Donde F_D es la fuerza de arrastre, ρ_f es la densidad del fluido, V_{inf} es la velocidad

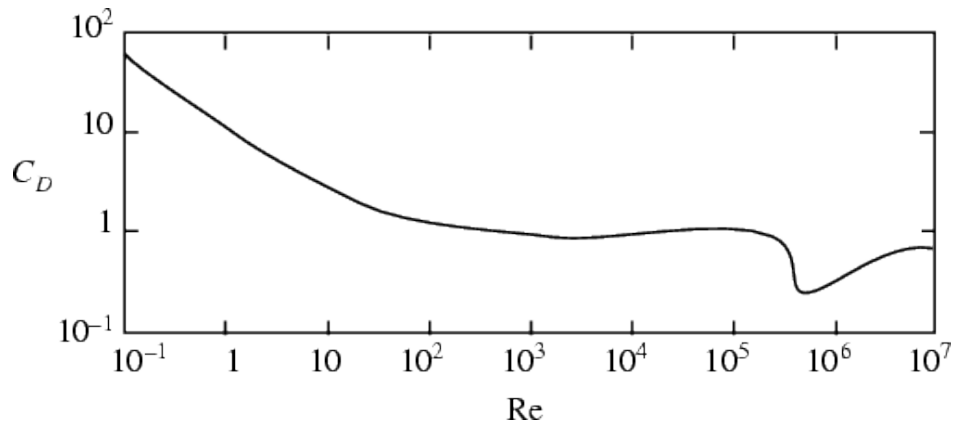


Figura B.1: Coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds para un cilindro de longitud infinita.

de la corriente libre del fluido y A_p es la proyección del volumen del cilindro en un plano perpendicular a la dirección del flujo. En el caso del cilindro $A_p = DL$ y, asumiendo que la fuerza de arrastre se distribuye uniformemente sobre el largo del cilindro, la fuerza por unidad de longitud aplicada sobre el cilindro es:

$$f_D = \frac{F_D}{L} = C_D \frac{1}{2} \rho_f V_{inf}^2 D \quad (\text{B.2})$$

Una vez obtenida la fuerza se calcula el desplazamiento en el extremo libre de la viga utilizando la teoría de Euler-Bernoulli para vigas unidimensionales. En el caso de una viga empotrada uniformemente cargada se obtiene:

$$\delta_{max} = \frac{f_D L^4}{8EI} \quad (\text{B.3})$$

Bibliografía

- [1] Luraghi, G., Wu, W., Gaetano, F. D., Matas, J. F. R., Moggridge, G. D., Serrani, M., *et al.* Evaluation of an aortic valve prosthesis: Fluid-structure interaction or structural simulation? *Journal of Biomechanics*, **58**, 45–51, 2017. iv, 2
- [2] Hou, G. H., Wang, J., Layton, A. Numerical methods for fluid-structure interaction — a review. *Commun. Comput. Phys.*, **12**, 337 – 377, 2012. iv, 7, 10
- [3] Figueroa, A. A., Weht, G., Sacco, C. G., Chang, S. C. C. Aeronautica compresible inestacionaria. *Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica*, **3**, 2014. iv, 8
- [4] Blanco, P. J., Feijóo, R. A., Dari, E. A. A variational framework for fluid-solid interaction problems based on immersed domains: Theoretical bases. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **197**, 2353 – 2371, 2008. iv, 12, 13, 57
- [5] White, F. M. Fluid Mechanics. McGraw-Hill, 2003. v, 31, 40, 58, 63
- [6] Techet, A. H. Vortex induced vibration i. *MIT OpenCourseWare*, 2005. v, 41
- [7] Modelado de problemas de interacción fluido-estructura con comsol. URL <https://www.addlink.es/noticias/comsol/2616-modelado-de-problemas-de-interaccion-fluido-estructura-con-comsol>. 1
- [8] Marquez Turiello, R. L. A., Padra, C., Scheble, M. Modelado eficiente de Vibraciones de Sistemas con interacción fluido-estructura. Tesis de Maestría - Instituto Balseiro, 2015. 2
- [9] Dari, E. A., Blanco, P. J., Feijóo, R. A. A computational strategy for fluid-structure interaction combining immersed domains and a body-fitted approach. *Mecánica Computacional*, **29**, 3037–3051, 2010. 4, 11, 16, 57
- [10] Burden, R. L., Faires, J. D., Burden, A. M. Análisis Numérico. Cengage, 2016. 16

-
- [11] Blanco, P. J., Feijóo, R. A. Incompatibilidad Cinemática, Imersão de Domínios e Modelagem Constitutiva de Multiescala: Nexos com a Modelagem do Sistema Cardiovascular. Tese doutor em ciências - Laboratório Nacional de Computação Científica, 2008. 16
- [12] Gadur, S. N., Dari, E. A., Palacios Amaya, M. A. Modelado de válvulas de accionamiento pasivo mediante la técnica de sólidos inmersos. Tesis de Grado - Instituto Balseiro, 2017. 16, 30, 31
- [13] Buscaglia, G. C. Documentación GPFEP. Departamento de Mecánica Computacional, Centro Atómico Bariloche, 1995. 21
- [14] URL <https://www.paraview.org>. 22
- [15] Geuzaine, C., Remacle, J. F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. URL gmsh.info. 22
- [16] Dari, E. A., Vénere, M. Algoritmos eficientes para la búsqueda del elemento de una red que contiene a un punto dado.”. *Mecánica Computacional*, **10**, 455 – 464, 1991. 23
- [17] Williamson, C. H. K. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annual Review Fluid Mechanics*, **28**, 477–539, 1996. 31, 46, 50, 58
- [18] Timoshenko, S. Resistencia de materiales, tomo II. Ed. ESPASA-CALPE S. A., 1957. 57, 60

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a todas las personas que hicieron posible la concreción de este trabajo. Agradezco a mis directores por haberme dado esta oportunidad de crecimiento. Principalmente agradezco a mi co-director Enzo A. Dari, por haberme ayudado incluso cuando todavía no formaba parte del plantel de directores, y por ser además un ejemplo a seguir en cuanto a cultura de trabajo, humildad y liderazgo.

También agradezco a mis compañeros de oficina por haber sido excelentes acompañantes durante este proceso.

Quisiera agradecer particularmente a Santiago L. Zuñiga y M. Gastón Alonso por sus innumerables aportes y comentarios sobre el trabajo. Les agradezco a ambos el haberme motivado a alcanzar esta meta cuando los resultados no se veían tan prometedores.

También quiero agradecer a mis amigos, especialmente a Ana Laura Gramajo, Ana Alicia Gramajo, Juan Vignolo, Anahí Selva Garcia, Ignacio Bustos y nuevamente Gastón Alonso, por ser mi apoyo emocional durante todo este tiempo.

Finalmente doy gracias a mi familia, especialmente a mis padres Alejandro Alderete y Sandra R. Tommasi, por haber sido mi modelo a seguir y por creer en mí e impulsarme siempre a alcanzar cualquier meta que me proponga.